

目 錄

心路歷程

那些年，父親教導我的日子	002
我的求學經驗	027
我研究數學的經驗	032
學數甘苦談	044
我在香港中文大學的數學老師	046

真知灼見

數學家的志氣與操守	054
中國科技發展的個人建議	067
數學與科技	077
數學的內容、方法和意義	086
香港數學歷史	092
談數學與生活之決策	098

數學漫步

3D 改變未來——泛談數學的 3D 應用	110
21 世紀的數學展望	131
幾何三十載	145
現代幾何的發展	159
偏微分方程的方法	163
數學在今日社會的應用	172
規範理論與幾何	175

詩文欣賞

訓子純深——先父及中國文學對我數學工作的影響	192
母親	200

編先父遺書後序	208
杭州賦	212
陳省身與我的師生情誼	214
敬贈師友	217
寄語學生	219

大師風采

丘成桐——站在數學之巔的科學巨匠	222
丘成桐先生學術成就	267
從鄉村少年到數學大師	292
致伯克利 Sarason 教授的推薦信	302
頭腦風暴	308
他出生在一個熱愛教育的家庭	310



丘成桐出生不久，與父親合影。
攝於汕頭。



全家福。1955年沙田龍鳳台。

沙田公立學校學生成績單			
姓名：丘成桐		班級：二年級	學期：第二學期
國文	85	90	
英文	80	85	
算術	75	80	
常識	85	90	
體育	80	85	
音樂	85	90	
美術	80	85	
勞作	85	90	
社會	85	90	
衛生	85	90	
總分	820		
平均分	82		
班級	37	2962	
本級人數	40	男	19
女	21	女	19
校長：陳志輝	級任：[Signature]	一九五六年二月四日	

沙田小學二年級成績單

註冊證		
中二年級普通班學生		姓名：丘成桐
		
攝正次	副正次	第三次
攝正次	副正次	第三次
<small>詳書：每學期分四次註冊，每次由班主任簽章，須准註冊，始能上課。</small>		

培正中學二年級註冊證



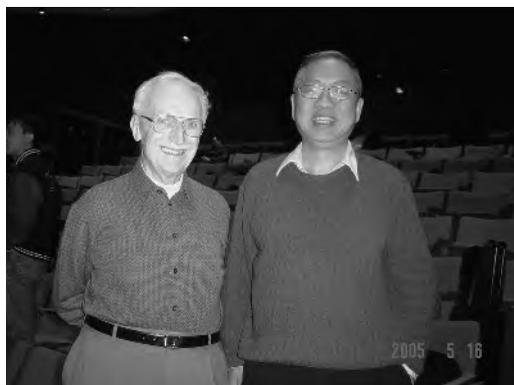
攝於加州大學伯克利分校



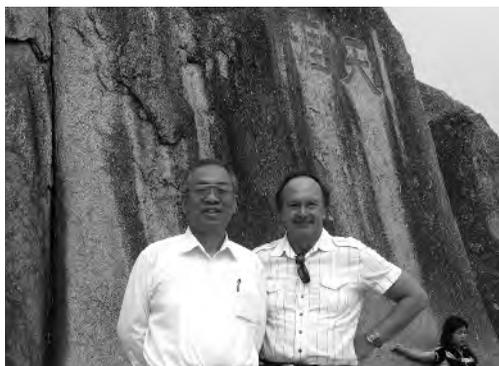
丘成桐與家人



攝於父親就讀的早稻田大學



Calabi 與丘成桐，紀念陳身省先生微分幾何國際會議，2005 年攝於哈佛大學



丘成桐與 Hamilton

我研究數學的經驗

丘成桐

今天林松山先生叫我講關於應用數學的問題，我想，講一講做學問的經驗也好。因為我來台灣也差不多五年了，我想很多研究人員做研究的方法並不見得是最好的，尤其是我覺得很多年輕人為甚麼在國外能夠唸得好？這是很值得思考的。所以，我想講講我自己的經驗，或是我對數學的看法，讓大家參考一下。

我想最重要的當然是要有熱忱，要有求真的精神，這也是始終要培養的。我們做學問是為了求真，無論是從對自然界的了解還是從數學方面來講，我們有不同的觀念，可是真與美就數學來講是最重要的。追求真與美的熱忱很重要，因為我們整個做學問的路上會碰到很多不同的困難，假如沒有熱忱的話，就沒有辦法繼續下去。所以追求學問的最崇高目標，無過於真與美，追求的目標無誤，熱情才不會消滅。我們非要想辦法培養自己追求學問的熱忱不可。

幾天前我去看父親的遺作，其中有屈原：「路漫漫其修遠兮，吾將上下而求索」。做學問的路很長很遠，我們一定要看得很遠，因此我們要上下去求索，要想盡辦法去求真。如何去尋找真與美，並且能夠始終不斷地堅持下去，這是成功的一個很重要因素，如果沒有熱忱的話，就永遠達不到做大學問的地步。我們再舉一個國外的例子，在一個有組織的團隊裏，競爭很厲害，尤其在物理或其他實驗科學方面的研究，真是分秒必爭。有一個題目剛好出來的時候，大家曉得其他人也會做這個問題，很多博士後或教授聚在一起往往工作到深夜，甚至整個晚上不睡覺。這裏當然有一個競爭性在裏面，就是希望達到一個目標，能比人家快一點。可是另一方面

也是因為求真的熱忱很大，刺激着他們不肯放鬆。否則的話，很多有終身教職的研究人員，沒有必要這樣拼命，可是很多人還是願意這樣子，我想熱忱是重要的原因。

我們要曉得，做研究的路是很遠的，我們要在中間低潮的時候還能夠堅持做下去。很多做研究的人，他往往覺得若不在中心的地方，便不敢去做。有些人到過最好的地方，他也不敢去碰難的題目。這有很多不同的原因，等一下我們再慢慢談，可是我想最要緊的是基本功夫要做好。基本功夫沒做好往往會出現上述問題。上中學、大學的時候或者在研究院做研究生的時候，很多基本功夫都要培養，很多學生在年輕的時候不將基本功夫做好，以後做研究就很吃力。

新竹交通大學着重應用數學，可是我們曉得應用數學的主要工具是從純數學來的。很多學生認為，既然是應用數學就不用學純數學，或者是應用物理就不必學理論物理，這是很大的錯誤。很多基本的功夫非在做學生的時候學好不可，為甚麼呢？我們要做習題，並且要大量地去做，這是學習基本功夫的必要過程。我相信很多現在畢了業拿了博士學位的人看一本書的時候不會再去做習題，遇到一些比較複雜計算的時候往往不願意去算。可是很多基本的想法就是要從計算裏面領會得來的。我們所做的命題，最後的時候可能留下很簡單很漂亮的结果，可是中間往往要通過大量的計算我們才曉得這結果是怎麼得到的。好的研究不是一朝一夕得來的，往往做了一百次，九十九次是錯的，最後一次才是成功的。但成功的時候，我只跟你講成功的結果，不會跟你講九十九次失敗的經驗。錯誤的經驗往往是很好笑的，因為經常犯很明顯的錯誤，要在做完的時候才知道。可是當講給人家聽的時候很少會跟人家講錯誤的那部分，其實錯誤的結果讓你眼睛明亮，它幫你忙，讓你向前走。其實你能得到錯的結果，已經是很不錯了，因為很多初學者連怎麼着手做這個題目都不知道。譬如來講，你給我一個化學題，該從甚麼地方開始做我不曉得，因為我沒有這基本的功夫，根本不曉得要從甚麼地方開始。

一個好的數學家至少要掌握兩門以上很基本的功夫。基本功夫不是一

朝一夕學來的。譬如講，有代數、分析、幾何等種種不同的方法，我們在中學的時候就開始學。有些人喜歡幾何，覺得代數沒有甚麼意思不想學，或者是學代數的人不想學幾何，各種想法都有，可是最後我們發現，真做研究的時候全部都要用到。

有人說我做了一個特殊的題目後就永遠只去做這方面的題目，結果連這方面的問題也不見得做得好。因為數學不停地發展，不斷地改變。自然界能夠提供給我們的問題，不會因為你是幾何學家就繼續不斷地提供幾何方面的問題，而往往是與幾何結合在一起的問題。到了題目出現的時候，要用到其他工具，如果我沒辦法去了解，就比其他吃虧了。

例如，數學中很重要的一門「羣表示理論」，一般來講很多地方不教這門課，可是在許多應用與理論科學中都要用到。有些好的數學家可以很熟練地運用「羣表示理論」來分析很多問題。我們可能沒有這些辦法，這就是因為基本功夫沒有做好的緣故。我想「羣表示理論」大概是進了研究院或者大學後半期的時候學的。中國數學家在這方面的訓練不夠，因此不如國外學者，可見有些基本學科一定要學好，同時要很早就學。

我們學數學的不單要學數學上的基本功夫，物理上的基本功夫也要學，這是在大學時就要學的。力學、電磁學我們都要有一定的了解，因為物理跟數學這幾十年來的發展愈來愈接近，很多問題是物理提供的。我們假如對這些基本的觀念完全不了解的話，我們看到的題目就比不上其他懂得這方面的數學家，他們能夠很快地融會貫通。到了這個年代，很多數學的問題往往是從其他的學問如理論物理、應用數學或其他的科學裏來的，它們甚至提供了直觀和方法。我們想了很久的一些問題，往往因此得到解決。假使我們從來都不接觸其他科學的話，就完全落伍了。

舉個例子來講，代數幾何學這二十年來已有長足的發展。可是到了這幾年，用古典的方法或者纖維叢的方法都沒有辦法解決的問題，理論物理卻說明我們看到以前看不到的可能。由於本身知識的局限，很多代數幾何學家遇到這個困難的時候沒有辦法接受這些專家的看法，遇到理論物理就不敢去碰它。可是有時候物理指明了解決基本問題的方向，代數幾何學家

又覺得很難為情，因為他們沒有辦法去了解，所以這是一個很令人困擾的問題。假使你不肯學物理學上的基本功夫，你就很難接受這個新的挑戰。記得我看過一本書，序言裏提及作者很感謝代數學家 Albert，為甚麼感激他呢？作者說：Albert 教我代數，使得我坐下來時候，看代數問題不會恐慌，使我能夠坐下來好好地對待代數上的問題。我們的基本功夫能不能做到如此，就是當看到幾何或應用數學的問題時，可不可以坐下來想辦法對付它，我想這是很重要的。我們往往看到問題，坐下來時候，都恐慌得不曉得怎麼辦，因此就算了，我想大家都有這個經驗。你做基本功夫一定要做到你看一個題目，明明是未解決的問題，你還是可以坐下來，然後花工夫去解決它。即使你不能夠解決它，可是你至少曉得怎樣去想辦法，同時不會恐慌、放棄，我想這是最重要的。往往我們因為基本功夫沒做好，當一個深的題目或看法出現的時候，我們就拒絕去接受，認為這些題目不重要，這是去解釋自己為甚麼不能夠去做某一個問題的時候最自然的想法。

訓練基本功夫要在研究生、大學生或中學生的時候。基本功夫怎樣學好呢？有時一本書看完了就放在一邊，看了兩三本書後就以為懂了，其實單看書是不夠的，重要的是做習題，因為只有在做習題的時候你才能曉得甚麼命題你不懂，也理解到前人遇到的困難在哪裏。習題不單在課本裏找，在上課和聽講座時也可以找。我們很多學生上課的時候不願意做筆記，不做筆記的話根本不可能去唸任何學科。尤其是有時候演講的人講的題目是根本不在書本裏的，或者是還沒有發表的。我常覺得很奇怪，為甚麼學生不做筆記？他認為他懂了，其實明明不懂。因為可能連講課的人自己都還沒搞懂，可是聽講的人不願意去做筆記，也不願去跟演講的人談，或去跟其他老師討論。往往你花了一個鐘頭在那邊聽，聽完了以後就全部忘掉了。因為你沒有一個寫下的筆記可以溫習，怎麼可能不忘掉呢？基本功夫的另一個訓練就是要找出自己最不行的地方在哪裏。我們在看「羣表示理論」的時候，會遇到一大套理論。單看理論是不夠的，在應用時往往要知道羣是怎麼分解的，你不能夠將它寫下來，則理論對你一點好處都沒

有。又例如一個方程式的估計問題，你有沒有真正了解其中的方法，就全靠你的實際計算經驗，不是光唸一兩本書就足夠的。舉例來說，我的兒子最近剛學因式分解這個問題，老師教了他一大堆怎麼分解整數方程的方法。他學得很好，也學了怎麼找根的方法。可是有一次考試時他就是不知道怎麼因式分解。我跟他說，你明明曉得怎麼找根，為甚麼不能夠因式分解？主要是他學的時候沒想到找根與因式分解是同一件事情。問題就在於訓練基本功夫的時候，要去想清楚數學命題間的關係，以及為甚麼要解這些命題。

我們去看很多人寫的以前人的事，寫了很多很漂亮的介紹和批評。可是你自己沒有經歷過這一條路的話，你事實上很難了解困難在甚麼地方，為甚麼人家會這樣子想。要得到這個經驗，不單要做習題，還要做比較困難的習題。做困難的習題有甚麼好處呢？困難的習題往往是幾個比較基本的問題的組合。我自己看書的時候，常常會一本書一下子就看完了，覺得很高興，因為看完了。可是重新再看，反而甚麼都不懂。我想大家都有這個經驗，主要的原因是甚麼呢？我們沒有學好這學科，做比較困難的題目的時候，你就會遇到困難。尤其是我們做一些題目的時候，往往就覺得似是而非，在腦子裏面想，以為已經懂了，可以解決了，就一廂情願地想要很快解決它。很快地看完那一本書，事實上這是欺騙自己，也不是訓練基本功夫的方法。一個好的題目，你應當坐下來，用筆寫下來，一步一步地想，結果你會發現很多基本的步驟你根本沒有弄清楚。當你弄清楚的時候，你去看你以前需要的定理在哪裏，怎麼證的，我想你就會慢慢了解整個學問的精義在哪裏。

所以說，動筆去做題目是很重要的，我們做大學生的時候還願意做這個事，往往做研究生的時候，就不會動手去做了，畢業以後更不用講。一個題目在那裏，我們以為自己懂了，有些是很明顯，但有些是似是而非的，好像差不多了，事實上不是，裏面有很多巧妙的東西。我們一定要動手去做，當你在一門課裏面，基本功夫搞得很扎實以後，你就發現書裏面很多是錯的。在發現書本裏的錯誤時，你的基本功夫就不錯了。我們這個

時代的學生不看課外書，連本身的教科書也不看，很令人失望。

做研究時，自己要去找自己的思路。單單上課聽聽，聽完以後不看書，做幾個習題就算了，怎麼做都做不好。因為你沒有想自己的思路要樣子走。我在大學生第一年半的時候，因為剛開始將數學嚴格化，我覺得很高興。因為從整個邏輯看去，可以一點一點地推導，從前有些幾何或分析上的問題，我覺得可以慢慢將它們連起來，所以很高興。

我講這個事情是甚麼原因呢？我覺得現在很多大學生或研究生對於宏觀的數學看法並不熱情，就想課本上有題目拿來，能夠做完它，就覺得很高興，而沒有整體地去想整個數學，整個幾何，或者整個代數。我們需要研究的是甚麼事情？我們需要追求的是甚麼對象？去考慮這些事情其實並不會花你太多時間，可是你要有一個整體性的想法。整體性的想法是非要有基本功夫不可的，就算很瑣碎的事情，你都要曉得，以後才能對整個科學有一個基本的看法，一個大範圍的看法。

現在談談我個人的經驗，記得唸中學的時候我學了平面幾何。大家都曉得平面幾何很漂亮，我也覺得很有意思。書本上的平面幾何問題大概我都懂得怎麼做，可是我覺得還是不太夠，所以我將很多基本的問題連在一起，之後開始慢慢想，去發現一些書本沒有的問題，去想書本的方法能夠有甚麼用處，是不是大部分平面幾何上的問題都可以解決？我想找一些命題是這些方法沒有辦法解決的。我記得上初中的時候想過一個問題，我發覺沒有辦法能解決它。我花了很多工夫去想，看了很多課外書來幫忙，最後很高興地找到一本書講那個問題不可能用圓規和直尺來解決，可以用代數的方法來證明。有半年的工夫，我有過很多不同的想法，但完全不曉得圓規和直尺解決不了這個問題，因此看到人家將這個問題解釋清楚，就覺得很高興。那時候我是中學生，沒有了解伽羅瓦理論，所以還是不太搞得清楚是怎麼證明的。可是我至少曉得有些問題是不能用圓規和直尺解決的。也因為經過很長的思考，所以我開始對這類問題了解清楚得多了，也開始欣賞到做數學的精義。我想我們做一個習題或研究，最好花些工夫去想想這整個問題的來龍去脈，也多看一些參考書，這對你的幫助很大。因

為數學無非是很多方法放在一起解決很多不同的問題，這是一個工具。我們了解一下這整個方法的局限，對基本功夫有很大的幫忙。基本功夫是一個工具，不是一個終點，是一個起步。基本功夫沒搞清楚的話，沒有辦法去講某個學問好，某個學問不好。

記得我從前在香港唸大學的時候，當時的環境比現在差很多，圖書館根本沒有甚麼書，也沒有甚麼很好的導師，但是還是看了很多課外書，也看了很多文章。但現在看來浪費了很多精力，這是眼界太淺，坐井觀天，不知數學的發展與方向的緣故。以後我到伯克利，也看了很多文章，得益良多。一方面當地圖書館收藏豐富，一方面有良師益友的交往，心中開始建立對數學的看法。我中學的時候，老師跟我們講：好的書要看，不好的書也要看。數學裏面不好的書我也看，你可能奇怪為甚麼不好的書我也看。我是覺得這樣子，你一定要曉得甚麼是好的書，甚麼是不好的書，所以你看文章的時候，一定要搞清楚這個作者寫的文章並不見得是了不起的。有些作者，你曉得他的著作是了不起的可以多看，可是從不好的文章裏面，你也可以看到許多現代的發展。因為有時候，從簡單的寫法裏面，你反而看得比較容易一點，可是你一定要曉得他裏面所講的命題並不見得是有意思的，你一定要經過你自己的大腦去搞清楚。可是他裏面的組織往往是有的，普通水平的文章裏面往往會引用有名的文章，也會介紹有名的文章裏面講些甚麼事情，同時往往會寫得比較容易看一點。因為它的水平比較低，它學了一些大數學家的文章，你看了以後，很快就曉得怎麼進出不同的地方，可以和好的文章比較。這是我自己的經驗，你不一定要這樣子做。我的建議是大部分的時間看大數學家的作品，小部分時間瀏覽一般作品，並做比較。

我讀研究生的時候，有時候從早到晚都在圖書館裏面看期刊、圖書。當時伯克利的研究生沒有辦公室，這很好，整天在圖書館裏面坐。幾乎主要期刊的文章我都看過，看過並不表示仔細地看，但至少有些主要的定理都看過。當時大部分都看不懂，看不懂沒有甚麼關係。往往你要花很多工夫才能夠在細節的部分搞清楚一篇好的文章，因為你第一眼看得懂的文章

並不見得太好。並不是講一定不好，簡單的文章有時也有創見，多看文章讓你曉得當時的人對於哪一個方向的問題有興趣，這對你有很大的幫助。

有很多學生跑來問我問題，我跟他講某某年有誰做過、做到甚麼階段。他們聽了很驚訝，為甚麼我曉得？沒有誰講給我聽，是我自己在文章上看到的。這很重要，你做研究的時候，你要曉得甚麼人做過、解過哪些問題，這對你的幫助很大。因為往往做研究的時候，你需要曉得的只是誰做過、在甚麼地方可以找到這個方面的文獻，有了這個幫助以後，你可以跑回去找這個文獻。甚至你只要曉得哪一年代誰碰過這個問題，對你也有很大的好處。有很多名家的文章往往比人家做快一步，就是因為他曉得誰做過這件事情，他可以去找這方面的文章，或者去找某個數學家幫忙。否則的話，做數學的有十幾萬人，你根本不曉得誰做過這個方面的問題，誰沒有做過。所以在這方面多學一些人家做過的問題，無論出名的文章也好，差的文章也好，都看一看。我當然是建議你看一些出名的文章，因為差的文章等於是消遣性的，像看武俠小說一樣，看完就放在一邊。你有追求的熱情以後，慢慢地再將不同的看法放在一起。到了這一步以後，我覺得你可以開始找自己的題目，因為你開始曉得整個數學界主要在考慮甚麼問題。

一個好的數學家怎麼找自己的問題是很重要的。當然有不同的找法。有些人要發展一套理論，有些人要解決難題，理論的目標最後還是要解決問題的，所以解決重要問題是發展一般理論中一個很重要的一環。舉例來說，像龐加萊猜想，它是三維拓撲中最主要的猜想，我們曉得前人花了很多心血去解決它，到了現在有很多不同的嘗試方法，各自成一個氣候。這個命題已經變成一門學科而不再是一個獨立的問題。這是三維空間的結構問題，需要徹底解決此猜想才算圓滿。另一方面為甚麼有些人對龐加萊猜想有興趣，對其他問題興趣不大，那是因為它是公認的難題。我想選題方面每個人有不同的看法。我有很多朋友是很出名的數學家，他們只想解決出名的問題，我認為這是錯誤的選題方法。在數學上，我們應該有整個的系統的想法，思考整個數學的目的在哪裏，應當解決甚麼樣的問題。

你們可能都唸過王國維講的做大學問的三個階段，第一階段是晏殊說的：「昨夜西風凋碧樹，獨上高樓，望盡天涯路。」這是王國維講做大學問的第一個階段，要解釋這一段話，我要再說明基本功夫的重要性。如果基本功夫沒有做好，你根本望不遠。你叫中學生去望盡天涯路，根本是不可能的事，最後只能是講一些空話。對數學或者科學的歷史不了解的話，你根本沒有資格去談以後的事。當然，不是叫你去全部了解，但至少要有一定的了解。

現在很多學生，尤其是研究生，我覺得比較頭痛，教他做一個小題目，做了以後，一輩子不願意放。不停地寫小文章，寫了文章當然可以發表，對某些年輕人來說，他認為這樣子很好，不想重要的問題，今天能夠寫一篇小文章，明天能夠寫一篇小文章，就可以升級，假如寫不出來的話，生活上會受到困擾。這都是對的，可是你真要做一個好的題目，其實也不見得那麼難。一些研究生的論文是歷史上有名的著作。為甚麼他們能夠花三、四年的工夫，做出那麼出色的工作？他們也是從不懂到懂，然後還要再向前進。所以真要做好的題目，並不是像你想像的要花很多很多的時間才能夠做到，問題是你的決心怎麼樣。昨夜西風凋碧樹，就是說你要望很遠的話，要將前面小的樹去掉，才能看得遠。假如我們眼界裏面看的都是小題目，就永遠都看不遠。我們要懂得怎麼放棄這些渣滓，才能夠做一些好的題目，我想這是一個很重要的事情。你不願意放棄你明明曉得不會有前途的問題，就永遠做不到好的問題。這是一個困難的選擇，如果你覺得要畢業、升級，而不願放棄你明明曉得不會有前途的問題，那你永遠不會成就一個大學問。

我記得剛學幾何學的時候，當時流行的度量幾何，所有工具都是從三角比較定理來的，我始終覺得對幾何的刻畫不夠深刻。後來我和我的朋友以及學生開始做一系列用微分方程做工具的幾何研究，我也很慶幸當時願意放棄一些小的成果，走一條自己的路。

我們選題的時候，可以跟出名的數學家、跟導師討論或者從書上去看，可是最後的思考一定要有自己的想法才能做成大學問。因為你沒有自

己的想法，你始終跟着人家走，是沒有辦法做好學問的。可是你可能沒有資格做這一件事情，因為你對於這一門學問還不懂。我講了這麼一大堆，就是希望你們把基本功夫做好，要曉得這一門學問裏的不同命題。就像你去買貨，你要曉得百貨公司裏面有可能出現甚麼東西，然後才去挑。

王國維談學問的第二階段是柳永的詩：「衣帶漸寬終不悔，為伊消得人憔悴。」尋找真理的熱情就如年輕的戀人對自己的對象的追慕，那是很重要的事。在追求一個好的命題的時候，中間要花很多工夫，有時候甚至是很痛苦的。可是我們只要曉得，最後的成果是值得的，我們就會花很多工夫去做，就像愛情一樣。很多年輕人找對象時，朝思暮想，但做學問卻沒有這種態度。假如你對做學問沒有熱情沒有持久力的話，你就不可能做成大學問。其實屈原說：「亦余心之所善兮，雖九死其猶未悔。」比柳永更來得徹底。

王國維講的第三階段是：「夢裏尋他千百度，驀然回首，那人卻在燈火闌珊處。」當然這是辛棄疾的詩，不是我講的，可是基本上我們都有這種感覺。你真做過一個好文章的時候，就有這種感覺。我們花很多工夫做一個好的命題，有想法的時候，你考慮這個想法對不對。有時候晚上睡不好，想得很辛苦。有時候想得辛苦了，就一睡睡很久。假如你做學問做到這個地步，你會解決很多意想不到的問題。我想沒有人是特別聰明的，可是你花了很多工夫，能夠進入新竹交通大學或新竹清華大學，資質應當都不會太差。我想你花了那麼多工夫進研究院，一定希望有一些成果。

我們做學問跟愛情不太相同，有時候不一定看到一個目標，而是看到其他。就像我剛才講的，我們要解決龐加萊猜想，即使最後還沒解決它，可是卻解決了其他的命題，這是數學歷史上常常有的。每一個人都有這個經驗，你明明是想要解決這個問題，結果卻解決了其他的問題。這是因為我們做這個題目的時候，不曉得走法對不對，可是你將這個工具全部搞好以後，基本的想法、有意思的想法你自己曉得以後，就可以解決很多問題了。在這個路上走的時候，思想不要太頑固，你要知道還有其他有意思的問題。你發展了一套想法以後，往往有其他的問題你剛好可以解決。可是

也因此你要曉得，你在整個做研究的過程中，眼睛要睜開。眼睛怎麼睜開呢？很多學生不願意去上討論班，也不願意去聽別人的講座。不聽講座就不曉得人家在做甚麼東西。明明你的方法可以解決他們在做的問題，但你眼睛閉起來，看不到，這是一個很大的問題。很多學生尤其是中國學生，說這個講座與我的論文無關，不願意去聽、不願意去看、不願意去跟人家來往、不願意去跟人家談。結果你做的論文可能不是你能解決的問題，可能你的方法剛好可以解決人家的問題。因為你不願意去聽、去看，你就解決不了任何問題。

一個人的思維有限、能力有限，你不可能不靠人家的幫忙。甚麼是人家的幫忙呢？一方面是看文章，聽講座，一方面就是請教名家。你自己去請教別人的時候，百分之九十五的時候人家不曉得你在做甚麼，也不可能給你提供直接的意見。假如能夠直接給你提供意見，幫你直接地解決問題的話，那麼你的這個問題不見得是很重要的問題。可見你剛開始沒有搞清楚這個問題有多重要。但不要緊，多請教別人總是有好處，至少曉得這個問題有多好，還是不好。假如你怕發問，就在講座或討論班的時候要多聽，多聽對你的好處多得不得了。因為即使你聽不懂，至少也曉得最近人家在做甚麼問題。你可能覺得莫名其妙，可是事實上卻開闊了眼界，這是很要緊的。所以能夠有機會儘量去聽不同的課，對你是有很大的好處的。唸純數學的也應當去聽應用數學或物理方面的課。聽講座時，即使放鬆一天，也沒有甚麼關係，反正總比在家裏面無聊或看電視好。

怎麼在一個孤立的地方，也能夠做一個好的學問？我舉個例子來講，十四年前，有一位學生，他要來跟我，我答應了收他。結果因為某種原因，他沒有辦法來跟我。但是他將我 1980 年寫的問題集，大概有一百題的樣子，選了其中的一個題目去做，非常拼命。我不曉得他拼命地在做這一個題目。雖然他在一個比較孤立的地方，可是十多年來只做這一個題目，最後去年做出很重要的結果。我覺得很高興，因為這一個題目是一個很不簡單的問題。可見你只要找對了題目，同時你肯花工夫去做，就算你不跟人家來往，也不見得做不出來。當然我不知道他是不是完全不跟人家來往，

因為那裏也有一些很不錯的數學家。在這種條件之下，我覺得完全可能做出好的學問，只要我們能夠將整個問題的思路搞清楚。

今天主要講的是我唸書的經驗，希望你們能夠參考。可是不見得每一個人都要遵循同樣的做法，因為每個數學家對學問都有不同的看法。可是我想最開始所講的基本功夫要做好，是永遠少不了的。然後要儘量去開發自己的領域，題目一定要選重要的。雖然後來真正得到的可能是比較小的結果，可是總比一開始只想做不重要的題目來得好。到了解決整個主要的問題以後，你對於整個學問的看法會更加深刻，又會生出全新的想法。

(本文基於 1997 年 6 月 9 日丘成桐在新竹交通大學的演講整理而成，
整理人為許正雄、林松山。)

學數甘苦談

丘成桐

小學時的我，數學並不高明。對那些千篇一律的練習，更感到枯燥無味。這種情況一直維持到 13 歲才有所改變。當我接觸到平面幾何，發現它能利用簡單的公設來推導漂亮且複雜的定理後，實在令我心馳神往。我隨即着手探討這科目，嘗試自己找出有趣的命題，然後利用這些公設加以證明，沉迷其中，其樂無窮。

我站在書店打書釘，讀了不少書（當時的圖書館都很簡陋）。漸漸地，我便學會了一些同學甚至老師都不懂的東西。我非常自豪，視之為自己的「秘密武器」。

有一次遇上一道作圖題，題目規定只許用直尺和圓規來完成。我當時自恃擅於此道，但花了超過半年的時間，還是毫無頭緒，令我十分氣餒。由於這不是如「三等分角」之類的標準題目，當時老師也幫不上忙。後來，我從日本數學家的著作中找到一條定理，方知道這種作圖題是不可能完成的。這讓我明白了代數在解決古典平面幾何難題中的威力，着實十分難忘。

這件事也告訴我讀課外書的好處。當時我上的中學，其數學水準可說是數一數二的了。但我有強烈的求知慾，想獲得超出課本水平的知識，我只好到圖書館找書自我進修。當時在圖書館中找好書不易，加上讀書時無人請教，令我舉步維艱。很多時候書讀上三遍，猶有不明白之處，但我總覺獲益良多。

書讀得愈多，我便漸漸地把所讀的融會貫通。當需要用到某些概念時，以前不甚了了的，現在突然都變得一清二楚，明白不過。這些年來，在研究生涯中，類似的情況屢見不鮮。

我個人的經驗是，不妨對有興趣的科目多加研習，且不要理會有沒有立竿見影的好處。我研習幾何後，便考慮涉獵其他數學科目，但發現它們不像平面幾何那樣建基於公設。我心中感到不是味兒，因為我相信所有數學都應該是百分之百嚴謹的。及至進了大學，學習了戴德金分割及其他構造法後，我才理解到整個數學的建構，是如此的美輪美奐。

雖然我素來對研究數理邏輯並不熱衷，但數學簡約嚴謹之美，實在令人動容，讚歎不已。所以，我對投身數學研究，無悔無憾。為追求學問之純美而工作，是許多科學家的原動力。我想每一個優秀的學生，都應該感受到科學的魅力。

我在香港時，苦無機會親炙數學大師。在 1969 年到伯克利後，情況便明顯改善過來。我對數學的體會，有了一百八十度的轉變，對學問的鑒賞能力也大大提高，此實有賴於周遭的科學家。正如魚兒在水，或困在淺沼，或游於大洋，其眼界何啻天壤！要成為一流的科學家，必須為大科學家所薰陶，此點極為要緊。畢竟與世隔絕而能成就大學問者，古今罕有。為此之故，凡有科學大師演講，我都抓住機會，出席細聽。

以上便是個人的一些體會。我非天資卓絕，但福至心靈，選對了人生的道路，有所成就，實乃至幸。

我在香港中文大學的數學老師

丘成桐

我在香港中文大學（以下簡稱中文大學）時，大學有三個學院：崇基、新亞和聯合。當時（1966—1969年）三個學院在香港的三個不同地方——新界、九龍和港島上課。三個學院的同學在1967年時開始共修一些學科。每個學院會派出一到兩位老師到九龍教授三院的學生，每星期二和星期四上課，同時在二年班和四年班期終時，三院學生有共同的考試。在20世紀七十年代中，三個學院遷到中文大學現址時，這種分開學院的教授方式才成為歷史，但當年的事跡還是很值得懷念的。

回顧當年我讀崇基數學系的情形猶歷歷在目。我在1966年通過大學考試進入崇基學院，當時收生是三個學院分開來辦理的，先父曾經在崇基任教，所以母親希望我到崇基讀書。當時系主任是謝蘭安先生，他認識先父，不知道是不是因為這個關係我才能夠進入崇基書院讀數學。考大學入學試時，我的數學成績很好，但是中文作文則分數不高，能夠進入中文大學可以說是僥倖，香港政府因此也沒有給我充裕的獎學金。崇基數學系一年班有十名學生，想來他們的獎學金都比我多。當時的同學有蕭煜祥、高錦超、王煥正等。

我在崇基學院讀數學，除了物理、中文、英文和通識科外，第一年班修的學科為微積分、線性代數和基本分析，分別由蘇道榮、謝蘭安和周慶麟三位教授講授（當時還有一位曹熊知行教授，但我一直沒有機會選修她的課，她現已年近百齡，仍精神奕奕，關愛中大和數學發展）。由於我對微積分已經相當熟悉，得到蘇老師的特准，只需考試而不須上課。線性代數和四年級學生一同修課，也能遊刃有餘。周慶麟先生則花了很多工夫向

我解釋現代分析基礎，使我學識大有長進。我記得中學時對實數系統的邏輯性不夠嚴格而覺得迷茫。從周先生學懂了 Dedekind Cut 的理論後才恍然大悟。到了二年班時，我們全班都很高興地聽說，有兩位分別剛從英國倫敦大學和美國伯克利大學畢業的博士來教授我們代數和微分方程，前者為 Turner-Smith 博士，後者為 Stephen Salaff 博士。

Turner-Smith 教授以後任崇基數學系的系主任，教代數。蒙他特准，我只去參加代數課的考試而不上課，主要原因是我想多修一些我認為比較深入的課程，而這些課程的時間表互有衝突。二年班時我選修了 Stephen Salaff 教授的常微分方程和 E. J. Brody 教授的泛函分析。Brody 教授是美國普林斯頓大學的博士，在崇基任教已有多年，他本來讀拓撲學，以後從事泛函分析和量子場論方面的工作。

這兩位教授都是很有個性的學者，他們都喜歡叫學生在課堂上回答問題。由於我總是很快找到答案，並且解說也算清楚，他們都賞識我的能力。Salaff 先生每一次上課時，總跟我微笑點頭才開始講課。他在準備常微分方程的講義時，常常找到他家裏談跟講義有關的數學問題。他從美國帶來了幾本微分方程的書籍，有 Rota 和 Ince 的書，我們邊看邊寫。當時數學界有一件盛大的事情，俄國數學家 Landau 和 Petrosky 宣稱他們已經解決了著名的 Hilbert 第十六問題，這是關於平面上由多項式定義的向量場有多少個極限環的問題。我和 Salaff 教授花了一些工夫來考慮相關的文獻，由於 Poincaré-Bendixon 的理論很漂亮而又是極限環理論的基礎，我們將它寫在講義裏，以後我們將這本講義發表成為一本小冊子。在大學二年級和三年級和 Salaff 教授在一起是一個有趣的經驗，一面幫助他找文獻，一面編寫講義，也因此常在他家裏或者在校園的茶室中會面。除了數學外，也談社會上的不平事，他喜歡用廣東話叫他的夫人為「太太」。她在研究中國農村的社會問題，所以我們也討論中國的文化和社會問題，她常到美國領事館去找文獻，我也幫忙做一些翻譯。

至於 Brody 先生，他能夠用國語交談，並且在黑板上寫漢字，他認為國語是中國的官方語言，所以堅持我們學生用國語交流，我的國語就是那

時開始學習的。他上泛函分析課時用國內出版的一本書，由李文清編著。Brody 先生授課的辦法很特別，他要求每位學生去找尋這本書錯誤的地方，向他報告，他自己也會指出書中的一些錯誤，然後大家去修正這些錯誤，在課堂中向全班同學講述。大概我表現得還好，他要求我每星期和他一同唸夏道行編著的無限維空間上的測度論，一頁一頁地看，倒學習了不少近代的算子理論，他其後將這本書翻譯成英文出版。

Brody 教授的中文名叫巴洛迪，養了一隻猴子，他視牠為家中成員之一。這種做法，在美國不算一回事，在當時的中國社會卻被認為是素隱行怪的事情，他卻不以為意，有時上完課後請我到半島酒店吃下午茶。

在二年班時我也到九龍去旁聽聯合書院和新亞書院老師的課。有周紹棠教授、Knight 教授和 Flemlin 教授，前兩者教授代數學，後者教授拓撲學。Knight 教授尤為傑出，兩年後，他從香港回到英國劍橋任教，他看到我在讀 Ahlfors 的複變函數論，大為搖頭，他認為 Chevalley 的書用代數來研究黎曼曲面才比較正宗並且更為優美，他將他自己的博士論文的手稿送了給我，使我受寵若驚。不幸的是，聽說他在英國駕電單車時失事去世，使我感傷。Flemlin 教授和 Knight 教授都不修邊幅，尤其是 Flemlin 教授在夏天時身上更略帶異味，但講課甚有趣味，他們都對定理的證明是否需要用選擇公理甚為重視。

大學二年班時家中發生了件很重要的事情，我的大哥得了很嚴重的疾病。他在中文大學讀中文系，在二年班時精神不好，由校醫建議到醫院診斷。當時家境不好，沒有辦法去看病，崇基二年班的同學發起捐款，並找容啟東院長幫忙。體育系主任盧惠卿教授認識一位養和醫院的張醫生，他從美國回來不久，介紹了一位香港最有名的腦科醫生溫祥來醫師。診斷後才知道是腦瘤，由於大哥的腫瘤深藏腦中，當時的醫學技術不足以顯示腦的深入部位，所以折騰了很久，才知道那是腦瘤。

事情發生後，Salaff 教授知道我家境貧窮，獎學金不足，於是向大學力爭增加我的資助，但是大學拒絕這個要求，只讓盧惠卿教授處理這事。由於我正在她班上學習太極拳，於是她安排了好幾位教授，由我教他們打

太極拳，其中一位女教授 Runyan 博士，年紀雖較大，卻很喜歡這種健身的方法，我也得到不少的外快。我同時也替中學生補習，生活才安定下來。

這時 Salaff 教授認為我在中文大學數學系已經學到足夠的知識，留在中文大學大概也不會有太大的好處，所以就要求數學系容許我早一年畢業。開始時我也不知道他替我做了這件事，在數學系通過這個建議後，我才知道有這件事。他告訴我一件有趣的事情，在中大中期考試的時候，改卷由三間學院的教授分別進行，在其中一科，崇基和聯合的教授都給我很高的分數，新亞卻很低。這是三院分開教課和改卷的毛病，我亦不以為意。但是在數學系要求大學容許我早一年畢業時，大學拒絕了這個要求。李卓敏校長告訴 Salaff 教授，華羅庚是數學奇才，也沒有拿到大學文憑，因此文憑並不重要。事實上四十年來的數學生涯，我從來沒有因為沒有大學文憑而遭到留難。有趣的是，Salaff 教授卻因此對華先生的生平感興趣，我們因此花了不少時間去研究華先生的著作，由我翻譯，我們都被華先生的傳奇人生深深吸引。這篇文章發表以後，華先生也開始知道有一個香港學生幫助一個美國人寫他的傳記。十二年後，我在普林斯頓高等研究院當教授時，華先生率中國團隊訪問高等研究院，我和華先生才第一次見面，特覺親切。

Salaff 先生是一個堅持原則的美國人，他繼續不停地要求李校長容許我早一年畢業，他也寫了一篇關於這件事情的文章，發表在《遠東經濟評論》裏。李校長大概煩得受不了，在我不知情的情形下，讓我到香港大學去找當時的數學系主任黃用諷教授，看看我是不是數學天才。黃教授向我解釋了一些他自己關於 Grassman 空間矩陣的研究，並說到華先生這方面的工作，我本人對這些工作興趣不大，因此他認為我表現不佳。大概我的學識不能達到黃教授心目中的天才標準，所以提前一年畢業的可能性就泡了湯。據說李校長曾經請教他的老朋友陳省身的意見，陳先生回信說如果我不能早點畢業，中文大學以後可能贈送我榮譽博士。陳先生成為我的導師後，三十多年相處中，我們從來沒有在這事上有任何交談，大概我們都認為學位這種事情並不重要吧。

在三年級時，我讀了很多關於泛函分析的書籍，著名的作品有 Dunford-Schwartz 的巨著，也得到 Kadison 和 Segal 兩位教授贈送給我的文章。聯合書院的吳恭孚教授和黃友川教授也時有過從，吳先生是梅縣人，他的父母和我的外祖父也有交往。以後 Kadison 教授多次邀請我到費城演講，已經忘記了我年輕時讀過他的文章了。1968 年秋季，周慶麟先生教授 Struik 所著的微分幾何，以後在 MIT 見到 Struik 教授，年歲已經過百，亦是異數。在 11 月時，Salaff 教授拿了美國出名的 Putnam 競賽的題目叫我試考，我只得一半的答案，使我大為沮喪，因為當時我在所有數學考試中，幾乎都得到滿分。後來才知道一般人考 Putnam 試都需要準備相當長的時間，在完全沒有準備下能夠得到一半試題的答案也算不錯了。對我而言，這卻是很好的教訓，畢竟學無止境，我還有很多學問還沒有學懂。

Salaff 教授一方面和中文大學爭取我早日畢業，一方面向他的朋友們包括 Sarason 描述我的情形。Sarason 先生是伯克利的教授，他回信給 Salaff 教授，鼓勵我申請到伯克利讀書，他甚至把申請表格寄給我。

Sarason 教授和 Salaff 都很年輕，都是反越戰的活躍分子。Sarason 教授在複變函數、調和分析有重要的貢獻，在很年輕時已經是伯克利的終身教授。他為了幫助我進入伯克利花了不少工夫，他沒有告訴我個中細節，但想來除了陳省身教授外，Kobayashi 教授都有正面的意見。當時伯克利的理學院院長 Elberg 見到我時，極為友善，想來他們都是幫過我忙的學者。我甚至得到一個極為豐厚的獎學金，由 IBM 捐助，一年有三千元美金，Salaff 等諸位教授的提拔，使我終生難忘。

申請伯克利是我讀大學的三年級上學期，申請研究院需要申請費，一方面家貧，這些申請費也是不尋常的負擔，一方面 Salaff 教授堅持只申請一家即可，所以在戰戰兢兢的情形下，等待伯克利大學的來信。這事到了 1969 年 4 月 1 日才揭曉，能夠到伯克利讀研究院確是我一生事業的轉捩點。在伯克利，我改變了對數學的看法，在香港時我想讀泛函分析，因為師友都對這方面的研究有興趣，在伯克利才看到有多姿多彩不同的數學發展，尤其是陳省身先生的工作。

陳先生在 1969 年 6 月到香港中文大學接受中文大學授予的榮譽博士。他到香港大學做演講時，我在他演講完後只找到機會交談了一分鐘，而到伯克利後他又剛好離休一年，所以也不常見面。一直到 1970 年暑期後，他回校上課才多見面。但是在 1969 年秋，陳先生也往往花一小段時間到他的辦公室裏與友人交談，在這期間他也會找我聊天，他還不是我的正式導師，所以談論學問機會不多。

伯克利替我安排了一個寄住家庭。我在 1969 年 9 月離開香港到三藩市，想不到 Sarason 教授和寄住家的人都來接機。我到伯克利不久，Salaff 教授和他的夫人也回到伯克利來。Salaff 教授決定繼續他在香港時關於華先生傳記的工作，他訪問了陳先生，繼續尋找華教授的資料，也常常要我幫忙，我也因此比較了解這位數學大師的生平。

在大學時，我也修讀物理、中文和哲學的課程，這段時間師友的教導和薰陶，對我的一生都有很大的影響。Brody 教授在 1986 年時寫信給我，他已離開香港，到東京大學訪問，有彷徨之意，我竟無策可展，深以為愧。轉眼二十六年，不知其蹤，亦不知其存亡。

2002 年時我接受香港電台傑出華人系列的訪問，拍攝我的生平。Brody 先生已經無法找尋，於是我和電台的陳先生一行決定去訪問 Salaff 教授，他已離婚，生活狀況不太好，但是基於他的原則，堅持不肯接受電台訪問。我們還是去了多倫多，在見面後一天，臨別時，電台終於有機會偷拍了一些鏡頭，想來他是有意讓我們拍的吧。

十多年來，Salaff 教授始終和我保持聯絡，每年聖誕我會送他一些禮物，他都很高興。這三年來我開始擔心他的健康，去年初再見到一面，他的健康已經大不如前，我曾贈送醫藥費用，但礙於加拿大政府的法例，不能接受，今年 1 月 21 日他女兒來信，說 Salaff 教授已在當天去世，這些贈款就作為殯儀之用。

四十年前教育我的恩師離世，使我感傷。當年中文大學崇基數學諸友如蔡文端、馬紹良、方資求等也都事業有成，而數學系亦聘請了一批傑出的數學家，培養了一批人才，今非昔比，創系諸人，當以此為榮。我謹以

至誠，以此文獻給當年的老師，尤其是對我影響最大的 Salaff 教授。

輓 Salaff 教授

嗟吾師之遽逝兮，悲愴惻而難忘。

覽電訊兮心戚戚，步中庭兮踟躕。

閱故作兮情切切，思往昔兮物存。

孤吟兮異域，周遊兮莫從。

立身兮西土，惠我兮東隅。

惟騏驥之馳騁兮，實伯樂之識賢。

仰高士之遺風兮，哀大樹之凋零。