序

我想人的天性是懶的，就像物體有惰性。要是沒甚麼鞭策，沒甚麼督促，很多事情就做不成。我的第一本科普書《數學傳奇》，就是在中國少年兒童出版社的文贊陽先生督促下寫成的。那是 1979 年暑假，他到成都，到我家裏找我。他說你還沒有出過書，就寫一本數學科普書吧。這麼說了幾次，盛情難卻，我就試着寫了，自己一讀又不滿意，就撕掉重新寫。那時沒有計算機或打字機，是老老實實用筆在稿紙上寫的。幾個月下來，最後寫了 6 萬字。他給我刪掉了 3 萬，書就出來了。為甚麼要刪？文先生說，他看不懂的就刪，連自己都看不懂，怎麼忍心印出來給小朋友看呢？書出來之後，他高興地告訴我，很受歡迎，並動員我再寫一本。

後來，其他的書都是被逼出來的。湖南教育出版社出版的《數學與哲學》，是我大學裏高等代數老師丁石孫先生主編的套書中的一本。開策劃會時我沒出席，他們就留了「數學與哲學」這個題目給我。我不懂哲學，只好找幾本書老老實實地學了兩個月，加上自己的看法，湊出來交卷。書中對一些古老的話題如「飛矢不動」、「白馬非馬」、「先有雞還是先有蛋」、「偶然與必然」，冒昧地提出自己的看法，引起了讀者的興趣。此書後來被 3 家出版社出版。又被選用改編為數學教育方向的《數學哲學》教材。其中許多材料還被收錄於一些中學的校本教材之中。

《數學家的眼光》是被陳效師先生逼出來的。他說，您給文先生寫了書，他退休了，我接替他的工作，您也得給我寫。我經不住他一

再勸說，就答應下來。一答應，就像是欠下一筆債似的，只好想到甚麼就寫點甚麼。5 年積累下來，寫成了 6 萬字的一本小冊子。

這是外因，另外也有內因。自己小時候接觸了科普書，感到幫助很大，印象很深。比如蘇聯伊林的《十萬個為甚麼》、《幾點鐘》、《不夜天》、《汽車怎樣會跑路》；中國顧均正的《科學趣味》和他翻譯的《烏拉·波拉故事集》，劉薰宇的《馬先生談算學》和《數學的園地》，王峻岑的《數學列車》。這些書不僅讀起來有趣，讀後還能夠帶來悠長的回味和反覆的思索。還有法布林的《蜘蛛的故事》和《化學奇談》，很有思想，有啟發，本來看上去很普通的事情，竟有那麼多意想不到的奧妙在裏面。看了這些書，就促使自己去學習更多的科學知識，也激發了創作的慾望。那時我就想，如果有人給我出版，我也要寫這樣好看的書。

法布林寫的書，以十大卷的《昆蟲記》為代表，不但是科普書，也可以看成是科學專著。這樣的書，小朋友看起來趣味盎然，專家看了也收穫頗豐。他的科學研究和科普創作是融為一體的，令人佩服。

寫數學科普，想學法布林太難了。也許根本不可能做到像《昆蟲記》那樣將科研和科普融為一體。但在寫的過程中，總還是禁不住想把自己想出來的東西放到書裏，把科研和科普結合起來。

從一開始，寫《數學傳奇》時，我就努力嘗試讓讀者分享自己體驗過的思考的樂趣。書裏提到的「五猴分桃」問題，在世界上流傳已久。20 世紀 80 年代，諾貝爾獎獲得者李政道訪問中國科學技術大學，和少年班的學生們座談時提到這個問題，少年大學生們一時都沒有做出來。李政道介紹了著名數學家懷德海的一個巧妙解答，用到了高階差分方程特解的概念。基於函數相似變換的思想，我設計了「先借後還」的

情景，給出一個小學生能夠懂的簡單解法。這個小小的成功給了我很大的啟發：寫科普不僅僅是搬運和解讀知識，也要深深地思考。

在《數學家的眼光》一書中，提到了祖沖之的密率 $\frac{355}{113}$ 有甚麼好處的問題。數學大師華羅庚在《數論導引》一書中用丟番圖理論證明了，所有分母不超過 366 的分數中，$\frac{355}{113}$ 最接近圓周率 π。另一位數學家夏道行，在他的《e 和 π》一書中用連分數理論推出，分母不超過 8000 的分數中，$\frac{355}{113}$ 最接近圓周率 π。在學習了這些方法的基礎上我做了進一步探索，只用初中數學中的不等式知識，不多幾行的推導就能證明，分母不超過 16586 的分數中，$\frac{355}{113}$ 是最接近 π 的冠軍。而 $\frac{52163}{16604}$ 比 $\frac{355}{113}$ 在小數後第七位上略精確一點，但分母卻大了上百倍！

我的老師北京大學的程慶民教授在一篇書評中，特別稱讚了五猴分桃的新解法。著名數學家王元院士，則在書評中對我在密率問題的處理表示欣賞。學術前輩的鼓勵，是對自己的鞭策，也是自己能夠長期堅持科普創作的動力之一。

在科普創作時做過的數學題中，我認為最有趣的是生銹圓規作圖問題。這個問題是美國著名幾何學家佩多教授在國外刊物上提出來的，我們給圓滿地解決了。先在國內作為科普文章發表，後來寫成英文刊登在國外的學術期刊《幾何學報》上。這是數學科普與科研相融合的不多的例子之一。佩多教授就此事發表過一篇短文，盛讚中國幾何學者的工作，說這是他最愉快的數學經驗之一。

1974 年我在新疆當過中學數學教師。一些教學心得成為後來科普寫作的素材。文集中多處涉及面積方法解題，如《從數學教育到教育數學》、《新概念幾何》、《幾何的新方法和新體系》等，源於教學經驗的啟發。面積方法古今中外早已有了。我所做的，主要是提出兩個基本工具（共邊定理和共角定理），並發現了面積方法是具有普遍意義的幾何解題方法。1992 年應周咸青邀請訪美合作時，從共邊定理的一則應用中提煉出消點演算法，發展出幾何定理機器證明的新思路。接着和周咸青、高小山合作，系統地建立了幾何定理可讀證明自動生成的理論和演算法。楊路進一步把這個方法推廣到非歐幾何，並發現了一批非歐幾何新定理。國際著名計算機科學家保伊爾（Robert S. Boyer）將此譽為計算機處理幾何問題發展道路上的里程碑。這一工作獲 1995 年中國科學院自然科學一等獎和 1997 年國家自然科學二等獎。從教學到科普又到科學研究，20 年的發展變化實在出乎自己的意料！

在《數學家的眼光》中，用一個例子說明，用有誤差的計算可能獲得準確的結果。基於這一想法，最近幾年開闢了「零誤差計算」的新的研究方向，初步有了不錯的結果。例如，用這個思想建立的因式分解新演算法，對於兩個變元的情形，比現有方法效率有上千倍的提高。這個方向的研究還在發展之中。

1979-1985 年，我在中國科學技術大學先後為少年班和數學系講微積分。在教學中對極限概念和實數理論做了較深入的思考，提出了一種比較容易理解的極限定義方法——「非 ε 語言極限定義」，還發現了類似於數學歸納法的「連續歸納法」。這些想法，連同面積方法的部分例子，構成了 1989 年出版的《從數學教育到教育數學》的主要內容。這本書是在四川教育出版社余秉本女士督促下寫出來的。書中第一次

提出了「教育數學」的概念，認為教育數學的任務是「為了數學教育的需要，對數學的成果進行再創造。」這一理念漸漸被更多的學者和老師們認同，導致 2004 年教育數學學會（全名是「中國高等教育學會教育數學專業委員會」）的誕生。此後每年舉行一次教育數學年會，交流為教育而改進數學的心得。這本書先後由 3 家出版社出版，從此面積方法在國內被編入多種奧數培訓讀物。師範院校的教材《初等幾何研究》（左銓如、季素月編著，上海科技教育出版社，1991 年）中詳細介紹了系統面積方法的基本原理。已故的著名數學家和數學教育家，西南師大陳重穆教授在主持編寫的《高效初中數學實驗教材》中，把面積方法的兩個基本工具「共邊定理」和「共角定理」作為重要定理，教學實驗效果很好。1993 年，四川都江教育學院劉宗貴老師根據此書中的想法編寫的教材《非 ε 語言一元微積分學》在貴州教育出版社出版。在教學實踐中效果明顯，後來還發表了論文。此後，重慶師範學院陳文立先生和廣州師範學院蕭治經先生所編寫的微積分教材，也都採用了此書中提出的「非 ε 語言極限定義」。

十多年之後，受林群先生研究工作的啟發帶動，我重啟了關於微積分教學改革的思考。文集中有關不用極限的微積分的內容，是 2005 年以來的心得。這方面的見解，得到著名數學教育家張奠宙先生的首肯，使我堅定了投入教學實踐的信心。我曾經在高中嘗試過用 5 個課時講不用極限的微積分初步。又在南方科技大學試講，用 16 個課時講不用極限的一元微積分，嚴謹論證了所有的基本定理。初步實驗的，效果尚可，系統的教學實踐尚待開展。

也是在 2005 年後，自己對教育數學的具體努力方向有了新的認識。長期以來，幾何教學是國際上數學教育關注的焦點之一，我也因此致

力於研究更為簡便有力的幾何解題方法。後來看到大家都在刪減傳統的初等幾何內容，促使我作戰略調整的思考，把關注的重點從幾何轉向三角。2006 年發表了有關重建三角的兩篇文章，得到張奠宙先生熱情的鼓勵支持。這方面的想法，就是《一線串通的初等數學》一書的主要內容。書裏面提出，初中一年級就可以學習正弦，然後以三角帶動幾何，串聯代數，用知識的縱橫聯繫驅動學生的思考，促進其學習興趣與數學素質的提高。初一學三角的方案可行嗎？寧波教育學院崔雪芳教授先吃螃蟹，做了一節課的反覆試驗。她得出的結論是可行！但是，學習內容和國家教材不一致，統考能過關嗎？做這樣的教學實驗有一定風險，需要極大的勇氣，也要有行政方面的保護支持。2012 年，在廣州市科協開展的「千師萬苗工程」支持下，經廣州海珠區教育局立項，海珠實驗中學組織了兩個班的初中全程的實驗。兩個實驗班有 105 名學生，入學分班平均成績為 62 分和 64 分，測試中有三分之二的學生不會作三角形的鈍角邊上的高，可見數學基礎屬於一般水平。實驗班由一位青年教師張東方負責備課講課。她把《一線串通的初等數學》的內容分成 5 章 92 課時，整合到人教版初中數學教材之中。整合的結果節省了 60 個課時，5 個學期內不僅講完了按課程標準 6 個學期應學的內容，還用書中的新方法從一年級下學期講正弦和正弦定理，以後陸續講了正弦和角公式，餘弦定理這些按常規屬於高中課程的內容。教師教得順利輕鬆，學生學得積極愉快。其間經歷了區裏的 3 次期末統考，張東方老師匯報的情況如下。

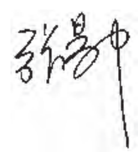
從成績看效果

期間經過三次全區期末統考。實驗班學生做題如果用了教材以外的知識，必須對所用的公式給出推導過程。在全區 80 個班級中，實驗班的成績突出，比區平均分高很多。滿分為 150 分，實驗一班有 4 位同學獲滿分，其中最差的個人成績 120 多分。

	實驗 1 班平均分	實驗 2 班平均分	區平均分	全區所有班級排名
七年級下期末	140	138	91	第一名和第八名
八年級上期末	136	133	87.76	第一名和第五名
八年級下期末	145	141	96.83	第一名和第三名

這樣的實驗效果是出乎我意料的。目前，廣州市教育研究院正在總結研究經驗，並組織更多的學校準備進行更大規模的教學實驗。

科普作品，以「普」為貴。科普作品中的內容若能進入基礎教育階段的教材，被社會認可為青少年普遍要學的知識，就普得不能再普了。當然，一旦成為教材，科普書也就失去了自己作為科普的意義，只是作為歷史記錄而存在。這是作者的希望，也是多年努力的目標。書中不當之處，歡迎讀者指正。



目錄

第一章

溫故知新

三角形的內角和

美籍華人陳省身教授是當代舉世聞名的數學家，他十分關心祖國數學科學的發展。人們稱讚他是「中國青年數學學子的總教練」。

1980 年，陳教授在北京大學的一次講學中語驚四座：

「人們常說，三角形內角和等於 180°。但是，這是不對的！」

大家愕然。怎麼回事？三角形內角和是 180°，這不是數學常識嗎？

接着，這位老教授對大家的疑問作了精闢的解答：

說「三角形內角和為 180°」不對，不是說這個事實不對，而是說這種看問題的方法不對，應當說「三角形外角和是 360°」！

把眼光盯住內角，只能看到：

三角形內角和是 180°；

四邊形內角和是 360°；

五邊形內角和是 540°；

…………

n 邊形內角和是 $(n-2)\times 180°$。

這就找到了一個計算內角和的公式。公式裏出現了邊數 n。

如果看外角呢？

三角形的外角和是 360°；

四邊形的外角和是 360°；

五邊形的外角和是 360°；

…………

任意 n 邊形外角和都是 360°。

這就把多種情形用一個十分簡單的結論概括起來了。用一個與 n 無

關的常數代替了與 n 有關的公式，找到了更一般的規律。

設想一隻螞蟻在多邊形的邊界上繞圈子（圖 1-1）。每經過一個頂點，它前進的方向就要改變一次，改變的角度恰好是這個頂點處的外角。爬了一圈，回到原處，方向和出發時一致了，角度改變量之和當然恰好是 360°。

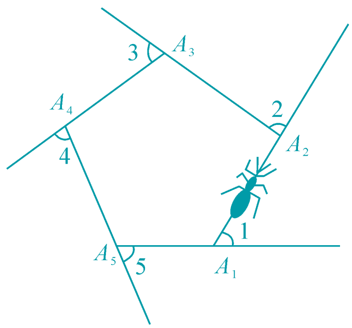


圖 1-1

這樣看問題，不但給「多邊形外角和等於 360°」這條普遍規律找到了直觀上的解釋，而且立刻把我們的眼光引向了更寬廣的天地。

一條凸的閉曲線——卵形線，談不上甚麼內角和與外角和。可是螞蟻在上面爬的時候，它的方向也在時時改變。它爬一圈，角度改變量之和仍是 360°（圖 1-2）。

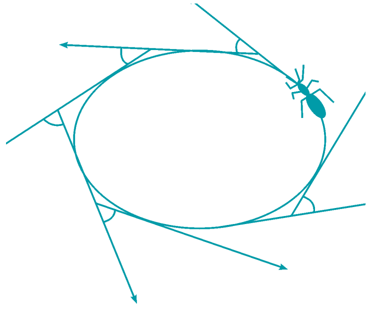


圖 1-2

「外角和為 360°」這條規律適用於封閉曲線！不過，敘述起來，要用「方向改變量總和」來代替「外角和」罷了。

對於凹多邊形，就要把「方向改變量總和」改為「方向改變量的代數和」（圖 1-3）。不妨約定：逆時針旋轉的角為正角，順時針旋轉的角為負角。當螞蟻在圖示的凹四邊形的邊界上爬行的時候，在 A_1 、 A_2 、 A_4 處，由方向的改變所成的角是正角：$\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 4$；而在 A_3 處，由方向的改變所成的角是負角：$\angle 3$ 。如果你細細計算一下，這 4 個角正負相抵，代數和恰是 360° 。

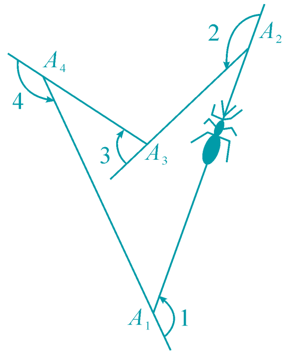


圖 1-3

上面說的都是平面上的情形，曲面上的情形又是怎樣呢？地球是圓的。如果你沿着赤道一直向前走，可以繞地球一圈回到原地。但在地面上測量你前進的方向，卻是任何時刻都沒有變化。也就是說：你繞赤道一周，方向改變量總和是 0°！

圈子小一點，你在房間裏走一圈，方向改變量看來仍是 360° 。

不大不小的圈子又怎麼樣呢？如果讓螞蟻沿着地球儀上的北回歸線繞一圈，它自己感到的（也就是在地球儀表面上測量到的）方向的改變量應當是多少呢？

用一個圓錐面罩着北極，使圓錐面與地球儀表面相切的點的軌跡恰好是北回歸線（圖 1-4）。這樣，螞蟻在球面上的方向的改變量和在錐面上方向的改變量是一樣的。把錐面展開成扇形，便可以看出，螞蟻繞一圈，方向改變量的總和，正好等於這個扇形的圓心角（圖 1-5）：

$$\theta = \frac{180°}{\pi} \times \frac{2\pi r}{l} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{2\pi l \sin 23.5°}{l}$$

$\approx 143.5°$（圓錐側面展開成扇形的圓心角 $\theta = \dfrac{2\pi r}{l}$ ）

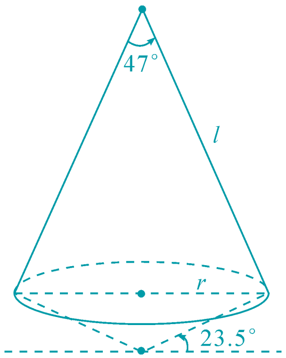


圖 1-4

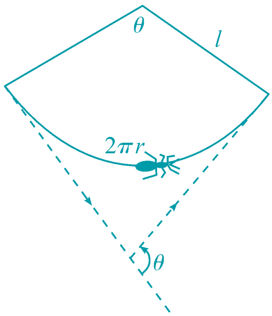


圖 1-5

要弄清這裏面的奧妙，不妨看看螞蟻在金字塔上沿正方形爬一周的情形（圖 1-6）。它的方向在拐角處改變了多大角度？把金字塔表面攤平了一看便知：在 B 處改變量是 $180° - (\angle 1 + \angle 2)$；繞一圈，改變量是

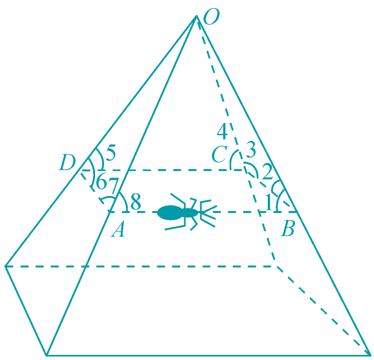


圖 1-6

$$4 \times 180° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8)$$

$$= \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA$$

這個和，正是錐面展開後的「扇形角」（圖 1-7）！

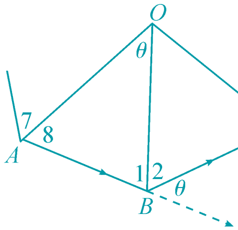


圖 1-7

早在二千多年前，歐幾里得時代，人們就已經知道三角形內角和 180°。到了 19 世紀，德國數學家、被稱為「數學之王」的高斯，在對大地測量的研究中，找到了球面上由大圓弧構成的三角形內角和的公式。又經過幾代數學家的努力，直到 1944 年，陳省身教授找到了一般曲面上封閉曲線方向改變量總和的公式（高斯—比內—陳公式），把幾何學引入了新的天地。由此發展出來的「陳氏類」理論，被譽為劃時代的貢獻，在理論物理學上有重要的應用。

從普通的、眾所周知的事實出發，步步深入、推廣，挖掘出廣泛適用的規律。從這裏顯示出數學家透徹、犀利的目光，也表現了數學家窮追不捨、孜孜以求的探索真理的精神。

了不起的密率

提起中國古代的數學成就，都會想起南北朝時期的祖沖之。提起祖沖之，大家最熟悉的是他在計算圓周率 π 方面的傑出貢獻，他推算出：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

他是世界上第一個把 π 值準確計算到小數點後第七位的人。

祖沖之還提出 $\frac{355}{113}$ 用作為 π 的近似分數。人們早一些時候已經知道 π 的一個近似分數是 $\frac{22}{7}$，但誤差較大。祖沖之把 $\frac{22}{7}$ 叫「約率」，把 $\frac{355}{113}$ 叫「密率」。$\frac{355}{113}$ 傳到了日本，日本人把它叫「祖率」。

很多人都知道用 $\frac{355}{113}$ 表示 π 的近似值是一項了不起的貢獻。但是，它的妙處，卻有不少人說不出來，或者說不全。

首先，它相當精確：

$$\frac{355}{113} = 3.14159292035\cdots$$

而

$$\pi = 3.1415926535897\cdots$$

所以，誤差不超過 0.000000267 。也就是說：

$$\left|\frac{355}{113} - \pi\right| < 0.000000267$$

也許你覺得，精確固然好，但精確並不是 $\frac{355}{113}$ 的唯一功勞。只要把 π 算得精確了，用個分數代表 π 還不容易嗎？比方說，祖沖之既然把 π 算到小數點後 7 位，那麼自然可以用分數

$$\frac{314159265}{100000000} = \frac{62831853}{20000000} = 3.14159265$$

來作為 π 的近似值，誤差不超過 0.000000005 ，豈不更精確？

但是，這個分數的分母比 113 大得多。分母大了，就不便寫、不便記。

在數學家看來，好的近似分數，既要精確，分母最好又不太大。這兩個要求是矛盾的。於是就要定下分子和分母怎麼比法。

我們不妨看看分母大小相同的時候，誰更精確一點。這有點像舉重比賽，按運動員的體重來分級：羽量級和羽量級比，重量級和重量級比。這樣一比，$\frac{355}{113}$ 的好處就顯出來了。

如果你再耐着性子算一算，就又會發現：在所有分母不超過 113 的分數當中，和 π 最接近的分數就是 $\frac{355}{113}$。所以，人們把它叫做 π 的一個「最佳近似分數」。

如果允許分母再大一些，允許分母是一個 3 位數，能不能找到比 $\frac{355}{113}$ 更接近 π 的分數呢？答案仍然是否定的：任何一個分母小於 1000 的分數，不會比 $\frac{355}{113}$ 更接近 π。

再放寬一點，分母是 4 位數呢？使人驚奇的是，在所有分母不超過 10000 的分數當中，仍找不到比 $\frac{355}{113}$ 更接近 π 的分數。

事實上，在所有分母不超過 16500 的分數當中，要問誰最接近 π，$\frac{355}{113}$ 是當之無愧的冠軍！祖沖之的密率之妙，該令人嘆服了吧！

也許你會問：有誰一個一個地試過？如果沒試過，這冠軍是如何產生的呢？

數學家看問題，有時候雖然也要一個一個地檢查，但更多的是從邏輯上推斷，一覽無遺地弄個明明白白。要說明分母不超過 16500 的分數不會比 $\frac{355}{113}$ 更接近 π，道理並不難：

已經知道 $\pi = 3.1415926535897\cdots$，而 $\frac{355}{113} = 3.14159292035\cdots$，所以

$$0 < \frac{355}{113} - \pi < 0.00000026677 \qquad (1)$$

如果有一個分數 $\frac{q}{p}$ 比 $\frac{355}{113}$ 更接近 π，一定有

$$-0.00000026677 < \pi - \frac{q}{p} < 0.00000026677 \qquad (2)$$

把（1）與（2）相加，得到

$$-0.00000026677 < \frac{355}{113} - \frac{q}{p} < 2 \times 0.00000026677 \qquad (3)$$

由（3），可得

$$\left|\frac{355}{113} - \frac{q}{p}\right| = \frac{|355p - 113q|}{113p} < 2 \times 0.00000026677 \qquad (4)$$

因為 $\frac{q}{p}$ 和 $\frac{355}{113}$ 不等，故 $|355p - 113q| > 0$，但又因 p、q 都是整數，故 $|355p - 113q| \geq 1$。於是

$$\frac{1}{113p} \leq \frac{|355p - 113q|}{113p} < 2 \times 0.00000026677 \qquad (5)$$

把不等式中的 p 解出來，得

$$p > \frac{1}{113 \times 2 \times 0.00000026677} > 16586 \qquad (6)$$

這表明，若 $\frac{q}{p}$ 比 $\frac{355}{113}$ 更接近 π，分母 p 一定要比 16586 還大。

具體地說，比 $\frac{355}{113}$ 更接近 π 的分數當中，分母最小的是

$$\frac{52163}{16604} = 3.141592387\cdots \tag{7}$$

它比 $\frac{355}{113}$ 略強一點，但分母卻大了上百倍。

祖沖之的眼光非常銳利。他從這麼多分數當中找出了既精確又簡單的密率。

祖沖之用甚麼方法計算 π，又怎麼找出了 $\frac{355}{113}$，這已經無法查考了。現在，人們已經會用「連分數」展開法，根據 π 值把它的一系列最好的近似分數找出來。方法如下：

設

$$\pi = 3 + 0.141592653\cdots = 3 + a_1 \tag{8}$$

則

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} &= \frac{1}{0.141592653\cdots} = 7.062513305\cdots \\ &= 7 + a_2\end{aligned} \tag{9}$$

把 (9) 代入 (8)，可得 $\pi = 3 + \frac{1}{7 + a_2}$，略去 a_2，得

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.1428\cdots \tag{10}$$

再求出

$$\frac{1}{a_2} = 15.99659454\cdots = 15 + a_3 \tag{11}$$

又得到

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + a_2} = 3 + \frac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + a_3}} \tag{12}$$

如果略去 a_3，得到

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106} = 3.141509\cdots \tag{13}$$

再利用（11）求出 $\frac{1}{a_3} = 1.003417097\cdots = 1 + a_4$，代入（12）並略去 a_4，便得到了祖沖之的 $\frac{355}{113}$。如果想再算準一點，可以求出 $a_4 = 292 + a_5$，得到 π 的更精確的近似分數 $\frac{103993}{33102}$。

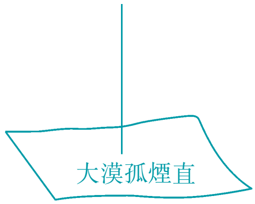
附帶提一句，$\frac{355}{113}$ 是很容易記住的。只要把 113355 一分為二，便是它的分母與分子了。

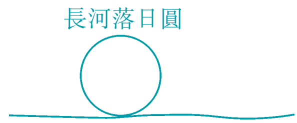
但是，祖沖之究竟用甚麼辦法把 π 算到小數點後第 7 位，又是怎樣找到既精確又方便的近似值 $\frac{355}{113}$ 的呢？這是至今仍困惑着數學家的一個謎。

會說話的圖形

在數學家眼裏，很多事物裏包含着數學。「大漠孤煙直，長河落日圓」，畫家也許據此創作一幅寥廓蒼涼的塞外黃昏景象，但數學家看

來，說不定會想起一根垂直於平面的直線，一個切於直線的圓呢！





這麼說，是不是在數學家眼裏，事物都變得簡簡單單的、乾巴巴的，失去了豐富的內容了呢？

也不見得。有些在大家看來簡簡單單的圖形，在數學家眼裏，卻是豐富多彩的。它會告訴數學家不少信息，當然，用的是數學的語言。你如果學會用數學的眼光看它，便也能聽懂它的無聲的語言。

一個長方形被十字分成四個長方形。大長方形面積是 $(a+b)(c+d)$，四個小長方形的面積分別是 ac、bc、ad、bd，於是，它告訴我們（圖 1-8）：

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

還是這麼個方塊圖，按圖 1-9 那麼一劃分，便成了

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

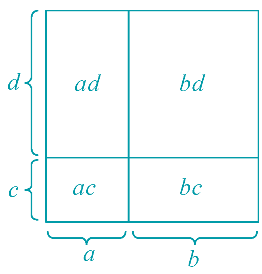


圖 1-8

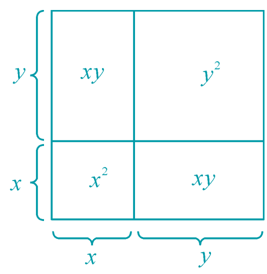


圖 1-9

如果按圖 1-10 那樣添一條斜線，並且給 x 和 y 以新的意義，則從大正方形去掉小正方形後，剩下兩個梯形。梯形面積各是 $\frac{1}{2}(x-y)(x+y)$，