

序

我想人的天性是懶的，就像物體有惰性。要是沒甚麼鞭策，沒甚麼督促，很多事情就做不成。我的第一本科普書《數學傳奇》，就是在中國少年兒童出版社的文贊陽先生督促下寫成的。那是1979年暑假，他到成都，到我家裏找我。他說你還沒有出過書，就寫一本數學科普書吧。這麼說了幾次，盛情難卻，我就試着寫了，自己一讀又不滿意，就撕掉重新寫。那時沒有計算機或打字機，是老老實實用筆在稿紙上寫的。幾個月下來，最後寫了6萬字。他給我刪掉了3萬，書就出來了。為甚麼要刪？文先生說，他看不懂的就刪，連自己都看不懂，怎麼忍心印出來給小朋友看呢？書出來之後，他高興地告訴我，很受歡迎，並動員我再寫一本。

後來，其他的書都是被逼出來的。湖南教育出版社出版的《數學與哲學》，是我大學裏高等代數老師丁石孫先生主編的套書中的一本。開策劃會時我沒出席，他們就留了「數學與哲學」這個題目給我。我不懂哲學，只好找幾本書老老實實地學了兩個月，加上自己的看法，湊出來交卷。書中對一些古老的話題如「飛矢不動」、「白馬非馬」、「先有雞還是先有蛋」、「偶然與必然」，冒昧地提出自己的看法，引起了讀者的興趣。此書後來被3家出版社出版。又被選用改編為數學教育方向的《數學哲學》教材。其中許多材料還被收錄於一些中學的校本教材之中。

《數學家的眼光》是被陳效師先生逼出來的。他說，您給文先生寫了書，他退休了，我接替他的工作，您也得給我寫。我經不住他一

再勸說，就答應下來。一答應，就像是欠下一筆債似的，只好想到甚麼就寫點甚麼。5年積累下來，寫成了6萬字的一本小冊子。

這是外因，另外也有內因。自己小時候接觸了科普書，感到幫助很大，印象很深。比如蘇聯伊林的《十萬個為甚麼》、《幾點鐘》、《不夜天》、《汽車怎樣會跑路》；中國顧均正的《科學趣味》和他翻譯的《烏拉·波拉故事集》，劉薰宇的《馬先生談算學》和《數學的園地》，王峻岑的《數學列車》。這些書不僅讀起來有趣，讀後還能夠帶來悠長的回味和反覆的思索。還有法布林的《蜘蛛的故事》和《化學奇談》，很有思想，有啟發，本來看上去很普通的事情，竟有那麼多意想不到的奧妙在裏面。看了這些書，就促使自己去學習更多的科學知識，也激發了創作的慾望。那時我就想，如果有人給我出版，我也要寫這樣好看的書。

法布林寫的書，以十大卷的《昆蟲記》為代表，不但是科普書，也可以看成是科學專著。這樣的書，小朋友看起來趣味盎然，專家看了也收穫頗豐。他的科學研究和科普創作是融為一體的，令人佩服。

寫數學科普，想學法布林太難了。也許根本不可能做到像《昆蟲記》那樣將科研和科普融為一體。但在寫的過程中，總還是禁不住想把自己想出來的東西放到書裏，把科研和科普結合起來。

從一開始，寫《數學傳奇》時，我就努力嘗試讓讀者分享自己體驗過的思考的樂趣。書裏提到的「五猴分桃」問題，在世界上流傳已久。20世紀80年代，諾貝爾獎獲得者李政道訪問中國科學技術大學，和少年班的學生們座談時提到這個問題，少年大學生們一時都沒有做出來。李政道介紹了著名數學家懷德海的一個巧妙解答，用到了高階差分方程特解的概念。基於函數相似變換的思想，我設計了「先借後還」的

情景，給出一個小學生能夠懂的簡單解法。這個小小的成功給了我很大的啟發：寫科普不僅僅是搬運和解讀知識，也要深深地思考。

在《數學家的眼光》一書中，提到了祖沖之的密率 $\frac{355}{113}$ 有甚麼好處的問題。數學大師華羅庚在《數論導引》一書中用丟番圖理論證明了，所有分母不超過 366 的分數中， $\frac{355}{113}$ 最接近圓周率 π 。另一位數學家夏道行，在他的《 e 和 π 》一書中用連分數理論推出，分母不超過 8000 的分數中， $\frac{355}{113}$ 最接近圓周率 π 。在學習了這些方法的基礎上我做了進一步探索，只用初中數學中的不等式知識，不多幾行的推導就能證明，分母不超過 16586 的分數中， $\frac{355}{113}$ 是最接近 π 的冠軍。而 $\frac{52163}{16604}$ 比 $\frac{355}{113}$ 在小數後第七位上略精確一點，但分母卻大了上百倍！

我的老師北京大學的程慶民教授在一篇書評中，特別稱讚了五猴分桃的新解法。著名數學家王元院士，則在書評中對我在密率問題的處理表示欣賞。學術前輩的鼓勵，是對自己的鞭策，也是自己能夠長期堅持科普創作的動力之一。

在科普創作時做過的數學題中，我認為最有趣的是生鏽圓規作圖問題。這個問題是美國著名幾何學家佩多教授在國外刊物上提出來的，我們給圓滿地解決了。先在國內作為科普文章發表，後來寫成英文刊登在國外的學術期刊《幾何學報》上。這是數學科普與科研相融合的不多的例子之一。佩多教授就此事發表過一篇短文，盛讚中國幾何學者的工作，說這是他最愉快的數學經驗之一。

1974年我在新疆當過中學數學教師。一些教學心得成為後來科普寫作的素材。文集中多處涉及面積方法解題，如《從數學教育到教育數學》、《新概念幾何》、《幾何的新方法和新體系》等，源於教學經驗的啟發。面積方法古今中外早已有了。我所做的，主要是提出兩個基本工具（共邊定理和共角定理），並發現了面積方法是具有普遍意義的幾何解題方法。1992年應周咸青邀請訪美合作時，從共邊定理的一則應用中提煉出消點演算法，發展出幾何定理機器證明的新思路。接着和周咸青、高小山合作，系統地建立了幾何定理可讀證明自動生成的理論和演算法。楊路進一步把這個方法推廣到非歐幾何，並發現了一批非歐幾何新定理。國際著名計算機科學家保伊爾（Robert S. Boyer）將此譽為計算機處理幾何問題發展道路上的里程碑。這一工作獲1995年中國科學院自然科學一等獎和1997年國家自然科學二等獎。從教學到科普又到科學研究，20年的發展變化實在出乎自己的意料！

在《數學家的眼光》中，用一個例子說明，用有誤差的計算可能獲得準確的結果。基於這一想法，最近幾年開闢了「零誤差計算」的新的研究方向，初步有了不錯的結果。例如，用這個思想建立的因式分解新演算法，對於兩個變元的情形，比現有方法效率有上千倍的提高。這個方向的研究還在發展之中。

1979-1985年，我在中國科學技術大學先後為少年班和數學系講微積分。在教學中對極限概念和實數理論做了較深入的思考，提出了一種比較容易理解的極限定義方法——「非 ε 語言極限定義」，還發現了類似於數學歸納法的「連續歸納法」。這些想法，連同面積方法的部分例子，構成了1989年出版的《從數學教育到教育數學》的主要內容。這本書是在四川教育出版社余秉本女士督促下寫出來的。書中第一次

提出了「教育數學」的概念，認為教育數學的任務是「為了數學教育的需要，對數學的成果進行再創造。」這一理念漸漸被更多的學者和老師們認同，導致 2004 年教育數學學會（全名是「中國高等教育學會教育數學專業委員會」）的誕生。此後每年舉行一次教育數學年會，交流為教育而改進數學的心得。這本書先後由 3 家出版社出版，從此面積方法在國內被編入多種奧數培訓讀物。師範院校的教材《初等幾何研究》（左銓如、季素月編著，上海科技教育出版社，1991 年）中詳細介紹了系統面積方法的基本原理。已故的著名數學家 and 數學教育家，西南師大陳重穆教授在主持編寫的《高效初中數學實驗教材》中，把面積方法的兩個基本工具「共邊定理」和「共角定理」作為重要定理，教學實驗效果很好。1993 年，四川都江教育學院劉宗貴老師根據此書中的想法編寫的教材《非 ϵ 語言一元微積分學》在貴州教育出版社出版。在教學實踐中效果明顯，後來還發表了論文。此後，重慶師範學院陳文立先生和廣州師範學院蕭治經先生所編寫的微積分教材，也都採用了此書中提出的「非 ϵ 語言極限定義」。

十多年之後，受林群先生研究工作的啟發帶動，我重啟了關於微積分教學改革的思考。文集中有關不用極限的微積分的內容，是 2005 年以來的心得。這方面的見解，得到著名數學教育家張奠宙先生的首肯，使我堅定了投入教學實踐的信心。我曾經在高中嘗試過用 5 個課時講不用極限的微積分初步。又在南方科技大學試講，用 16 個課時講不用極限的一元微積分，嚴謹論證了所有的基本定理。初步實驗的，效果尚可，系統的教學實踐尚待開展。

也是在 2005 年後，自己對教育數學的具體努力方向有了新的認識。長期以來，幾何教學是國際上數學教育關注的焦點之一，我也因此致

力於研究更為簡便有力的幾何解題方法。後來看到大家都在刪減傳統的初等幾何內容，促使我作戰略調整的思考，把關注的重點從幾何轉向三角。2006年發表了有關重建三角的兩篇文章，得到張奠宙先生熱情的鼓勵支持。這方面的想法，就是《一線串通的初等數學》一書的主要內容。書裏面提出，初中一年級就可以學習正弦，然後以三角帶動幾何，串聯代數，用知識的縱橫聯繫驅動學生的思考，促進其學習興趣與數學素質的提高。初一學三角的方案可行嗎？寧波教育學院崔雪芳教授先吃螃蟹，做了一節課的反覆試驗。她得出的結論是可行！但是，學習內容和國家教材不一致，統考能過關嗎？做這樣的教學實驗有一定風險，需要極大的勇氣，也要有行政方面的保護支持。2012年，在廣州市科協開展的「千師萬苗工程」支持下，經廣州海珠區教育局立項，海珠實驗中學組織了兩個班的初中全程的實驗。兩個實驗班有105名學生，入學分班平均成績為62分和64分，測試中有三分之二的學生不會作三角形的鈍角邊上的高，可見數學基礎屬於一般水平。實驗班由一位青年教師張東方負責備課講課。她把《一線串通的初等數學》的內容分成5章92課時，整合到人教版初中數學教材之中。整合的結果節省了60個課時，5個學期內不僅講完了按課程標準6個學期應學的內容，還用書中的新方法從一年級下學期講正弦和正弦定理，以後陸續講了正弦和角公式，餘弦定理這些按常規屬於高中課程的內容。教師教得順利輕鬆，學生學得積極愉快。其間經歷了區裏的3次期末統考，張東方老師匯報的情況如下。

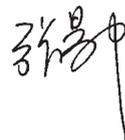
從成績看效果

期間經過三次全區期末統考。實驗班學生做題如果用了教材以外的知識，必須對所用的公式給出推導過程。在全區 80 個班級中，實驗班的成績突出，比區平均分高很多。滿分為 150 分，實驗一班有 4 位同學獲滿分，其中最差的個人成績 120 多分。

	實驗 1 班 平均分	實驗 2 班 平均分	區平均分	全區所有班級排名
七年級下期末	140	138	91	第一名和第八名
八年級上期末	136	133	87.76	第一名和第五名
八年級下期末	145	141	96.83	第一名和第三名

這樣的實驗效果是出乎我意料的。目前，廣州市教育研究院正在總結研究經驗，並組織更多的學校準備進行更大規模的教學實驗。

科普作品，以「普」為貴。科普作品中的內容若能進入基礎教育階段的教材，被社會認可為青少年普遍要學的知識，就普得不能再普了。當然，一旦成為教材，科普書也就失去了自己作為科普的意義，只是作為歷史記錄而存在。這是作者的希望，也是多年努力的目標。書中不當之處，歡迎讀者指正。



目錄



序	i
猴子吃栗子	001
交換和條件	004
口令的計算	006
有趣的變換	009
鐘錶和星期	012
在放大鏡下	015
炸饅頭和桶	018
雲霧和下雨	020
動物的大小	022
看起來簡單	026
寬度和直徑	028
常寬度圖形	031
擴大養魚塘	033
用機器證題	037
聰明的鄰居	041
我們來試試	043
列方程求解	045
其實並不難	047
先想想再看	050
這不算麻煩	052
啤酒瓶換酒	054
西瓜子換瓜	056
回收破膠鞋	058
字母代替數	060





該怎麼辦呢？	063
再前進一步	065
猴子分桃子	066
動腦又動手	067
方法靠人找	069
問個為甚麼	071
巧用加和減	074
二次變一次	076
0 這個圈圈	078
有名的怪題	080
你的臉在哪裏？	084
放在一起考慮	085
到處都有集合	087
雞和蛋的爭論	090
甚麼叫做雞蛋？	092
白馬不是馬嗎？	093
「是」是甚麼意思？	095
公孫龍的花招	096
你能吃水果嗎？	098
符號神通廣大	100
不能這樣回答	103
一種新的加法	105
甚麼叫做相交？	108
沒有來的請舉手	110
猜生年的遊戲	112
怎樣設計卡片？	116



怎樣分配鑰匙？	118
馴鹿有多少隻？	120
這個辦法真好	122
巧排詩的竅門	125
重視先後順序	128
請問甚麼是 1？	131
用尺子來運算	133
老伯伯買東西	136
能不能更多呢？	138
有用的二進位	140
用假選手湊數	144
怎樣拿十五點？	146
數學一大法寶	149
想一想再回答	151
猴兒水中撈月	154
到處都有映射	156
為甚麼算得出？	158
0 和 1 的寶塔	160
映射產生分類	163
一樣不一樣呢？	165
應用抽屜原則	167
伽利略的難題	170
康托爾的回答	172
怪事還多着呢	174
無窮集的大小	177
平凡中的寶藏	179
歷史令人神往	180

附錄

關於對「有名的怪題」一節的討論和修正	185
--------------------	-----

猴子吃栗子

有一位少年養了2隻猴子。

每天早晨，他給每隻猴子4個栗子吃，牠們十分高興地吃了。到了晚上，再給牠們3個，猴子就大吵大鬧起來。牠們想不通：為甚麼晚上比早晨少了一個呢？



這位愛動物的少年，當然希望猴子愉快一點，不要天天吵鬧。可他又沒有更多的栗子。於是，改為早上給3個，晚上給4個。

說也奇怪，猴子高興了。牠們發現：每天晚上，都比早晨吃到了更多的栗子。



$3+4=4+3$ 。猴子到底是猴子。牠不懂得交換律，所以早 3 晚 4 和早 4 晚 3，收到了不同的效果。

算術裏還有結合律、分配律和別的律。我們用慣了，往往認為那是理所當然的事，並不覺得「律」有甚麼寶貴，就像不覺得空氣的寶貴一樣。

想一想，要是這些律不成立，做起題來該多麻煩。你得按次序算，許多簡便的方法也沒有了。比如：

$$4 \times 73 \times 25 = 73 \times (4 \times 25) = 7300,$$

$$23 \times 68 + 32 \times 23 = 23 \times (68 + 32) = 2300。$$

這些簡便的方法，就是用交換律、結合律和分配律得到的。

不過，也不是甚麼運算都能交換、結合和分配的。初學代數的時候，我常在作業本上寫：

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 ; \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} ;$$

$$(3a)^2 = 3a^2 ; \frac{2x + 1}{4} = \frac{x + 1}{2}$$

那結果，是紅色的「×」子很多。後來，逐步吸取教訓，知道了甚麼運算可以用甚麼律，「×」子才少起來。

為甚麼不同的運算有不同的律呢？要是所有運算用一樣的律，豈不方便嗎？

偏偏不行。世界上的事是複雜的。不同的事，各有自己的特點和規律。

交換和條件

算術裏的交換律，在日常生活中一樣有用。不過，你也一樣不能亂用。

猴子吃栗子的故事，當然是人編出來的，並非確有其事。可是，餵豬的飼養員知道：給豬開飯的時候，要先餵粗飼料，後加精飼料，讓牠越吃越香，才能吃得飽，睡得好，長得快。交換律在這裏不成立。



還有一些事，它們的順序是根本不能交換的。先穿襪子，後穿鞋，很對。反過來，先穿鞋，後穿襪子，還像甚麼樣子呢？擰開鋼筆帽，灌上墨水，再寫字，很對。反過來，就不可能了。

也有這樣的情況：兩件事交換之後，照樣講得通，只是含意不同了。

說「小寧吃東西的時候還在看書」，馬上給人一個印象：小寧太愛學習了。你看，吃東西的時候還在看書。要注意身體，別得了胃病。

交換一下，說「小寧看書的時候還在吃東西」，這就會使人覺得他饞嘴，看書的時候還在吃零食。



體育老師喊的口令，有的時候是可以交換的，有的時候又不可以隨便交換。

要是把「向前 5 步走」和「向前 3 步走」交換一下，結果就一樣。反正總共是向前走了 8 步。

要是把「向前 5 步走」和「向後轉」交換一下，那就不同了。

先向後轉，再向前 5 步走，結果，和剛才的位置正好相差 10 步。

所以，做事、說話和做題一樣，得講究順序，不能隨便交換。

算術裏的別的律，也有類似的情況。

用水和米煮飯，用醬油、薑、蒜燒魚，然後一起吃。要是應用結合律，把米和醬油、薑、蒜放在一起煮飯，把水和魚放在一起燒魚，這怎麼做，又怎麼吃呢？

口令的計算

在算術裏，任何兩個數可以相加。

要是我們把兩個口令連續執行的結果，叫做這兩個口令相加所得到的和，那麼，任何兩個口令就可以相加了。相加之後，可能得到一個新口令，也可能得到一個老口令。

這「新」和「老」是甚麼意思呢？

你看：

向左轉+向後轉=向右轉；

向前1步走+向前3步走=向前4步走。

前一個式子的結果——向右轉，是一個老口令；而後一個式子的結果——向前4步走，便是一個新口令。不信去問體育老師，他從來不會叫你們「向前4步走」。體育課上的口令，是不興叫4步或者6步走的，因為最後的一步，不許落在左腳上。

不過，我們可以把思想解放一下：走4步就走4步，又有甚麼不可以的呢？好在我們這裏說的是數學，允許推廣，也允許產生新的數。

在算術裏，只要有了1， $1+1=2$ ， $1+2=3$ ……所有的正整數就都出來了。

在口令的算術裏，要產生出多種多樣的口令，只有一個口令可不夠了。

要是只有一個「向前1步走」，那就只能向前走，想轉一個彎都不行。

要是只有一個「向左轉」，那就只能原地轉來轉去，想走 1 步都不行。

不過，只要有了一個「向前 1 步走」和一個「向左轉」，便可以組成多種多樣的口令了。不信？你可以試試。

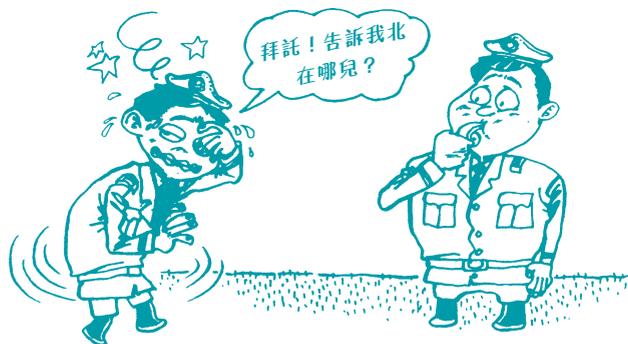
算術裏有個 0，任何數加 0，等於本數。

口令裏也可以有個 0。我們不妨把「立正」叫做 0。要是不考慮「稍息」、「向右看齊」之類的話，任何口令加上立正，都不會影響執行的結果。

在口令中，也可以有相反的口令。這好比代數裏的相反數。

3 和 -3 互為相反數。因為 $3+(-3)=0$ 。

向左轉的「相反數」是向右轉。因為向左轉+向右轉=立正=0。



向前 5 步走的相反數是甚麼呢？難道是後退 5 步嗎？

別着急。因為向前 5 步走+(向後轉+向前 5 步走+向後轉)=0，所以向前 5 步走的相反數，便是

向後轉+向前 5 步走+向後轉。

這 3 個口令連在一起，效果相當於後退 5 步。

我們這樣把許多口令放在一起，就形成了只有一個運算的系統。這個運算，就是兩個口令相加——接連執行。這種只有一個代數運算的系統叫做「羣」。

研究羣的數學叫做羣論。羣論和幾何、代數、物理……關係密切，非常有用，非常重要。它是 19 世紀的法國中學生伽羅瓦創立的。

有趣的變換

同一件事，用不同的看法和辦法去對待，往往有不同的結果或者收穫。

我們分別用 0、1、2、3 來代表立正、向左轉、向後轉和向右轉。



那麼，把

向左轉+向後轉=向右轉，

向右轉+立正=向右轉，

表示成

$1+2=3$ ，

$3+0=3$ ，

這都是說得通的。

可是，把兩個口令連起來，為甚麼非得叫做相加不可呢？不叫相加，偏偏叫相乘，又有甚麼不可以呢？

你也許會說，那不像話。要是叫做相乘，那麼，向右轉 \times 立正=向右轉，豈不是 $3\times 0=3$ 。這和0的性質不是矛盾了嗎？多彗扭呀。

這好辦。名字是我們取的。我們不會把立正叫做1嗎？

對了。0在加法中所扮演的角色，和1在乘法裏所扮演的角色十分相像。任何數加0不變，乘1也不變。把兩個口令連起來叫做相乘，立正便可以叫做1。你看：

向右轉 \times 立正=向右轉，

向左轉 \times 立正=向左轉，

向後轉 \times 立正=向後轉，

正好，任何數乘1，仍然不變。

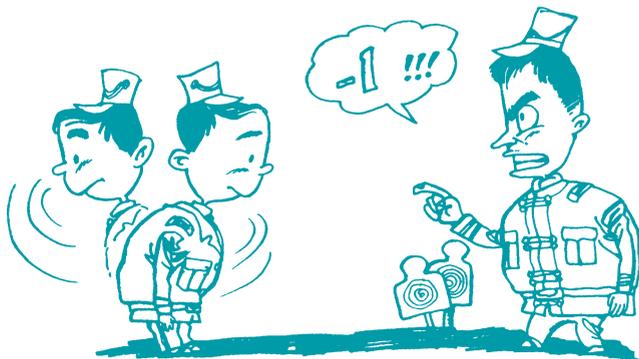
那另外3個口令取甚麼數做名字才恰當呢？

這也好辦。

\therefore 向後轉 \times 向後轉=立正，

\therefore 向後轉²=1。

把向後轉叫做-1再恰當沒有了。 $(-1)^2$ ，可不是等於1嘛。



這樣

∴ 向左轉 \times 向左轉=向後轉，

∴ 向左轉²=-1。

∴ 向右轉=向後轉 \times 向左轉，

∴ 向右轉 = $-1 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$ 。

你看，在這 4 個口令中，只要

立正=1，

我們就可以用乘法的運算規律算出：

向後轉=-1，

向左轉= $\sqrt{-1}$ ，

向右轉= $-\sqrt{-1}$ 。

真是妙得很。在這種算術裏，-1 可以開平方了。 $\sqrt{-1}$ 並不是不可捉摸的「虛數」。它的含義，不過是「向左轉」罷了。

許多日常生活裏的事情，都可以設法轉化成算術問題來運算處理。用考試得的分數計算學習成績，就是一個例子。