目錄

序 …… i

第一章　一個古老而年輕的方法 …… 001
第二章　同一個面積的多種表示 …… 007
第三章　一個公式表示多種面積 …… 013
第四章　面積公式小試鋒芒 …… 019
第五章　它可以導出許多基本定理 …… 027
第六章　初步小結 …… 035
第七章　證明長度或角度相等 …… 041
第八章　證明比例式或複雜的比例式 …… 051
第九章　證明和差倍分關係 …… 061
第十章　證明三點共線與三線共點 …… 067
第十一章　利用面積關係作幾何計算 …… 079
第十二章　面積關係與幾何不等式 …… 087
第十三章　幾個著名定理的面積證法 …… 099
第十四章　帶號面積和面積坐標 …… 107
第十五章　向前還能走多遠 …… 127
參考答案　練習題的提示或簡答 …… 130

第一章

一個古老而年輕的方法

利用面積關係來說明數學中的某些恆等式、不等式，或證明某些定理，這是一個古老而又年輕的方法。

說它古老，是因為：早在 3 000 多年前，在幾何學還沒有形成一門系統的學科時，人們已經會用這種方法來解決某些問題了。

說它年輕，是因為：直到今天，人們並沒有給它足夠的重視，因而，這種方法的潛力還沒有得到發揮。它廣泛的、五花八門的用途，很少在教科書、教學參考書和各種學生讀物中得到較系統的闡述。

幾何學的產生，源於人們對土地面積的測量的需要。翻開任何一本關於數學史的通俗讀物，差不多都記載着這樣的故事：在古埃及，尼羅河每年泛濫一次。洪水給兩岸的田地帶來了肥沃的淤積泥土，但也抹掉了田地之間的界線標誌。洪水退後，人們要重新劃出田地的界線，這就必須丈量和計算田地的面積。年復一年，就積累了最基本的幾何知識。

這樣看來，從一開始，幾何學便與面積結下不解之緣。英語中的「幾何」—— “*Geometry*”，這個字的字頭 “*geo*”，便含有「土地」的意思。

但是，用面積關係來證明幾何定理，最早的例子是勾股定理的證法。所謂勾股定理，就是：

在直角三角形中，兩直角邊的平方之和等於斜邊的平方。

中國古代數學家把直角三角形的較短的直角邊叫「勾」，較長的直角邊叫「股」，而把斜邊叫做「弦」。因而把這個定理敘述為「勾方加股方等於弦方」，勾股定理由此而得名。

勾股定理的下述精彩證明，是中國古代數學家智慧的結晶。

勾股定理證法之一：

如圖 1-1 所示，四個同樣大小的直角三角形的斜邊圍成一個正方形；

它們的直角邊圍成了一個更大的正方形。（為甚麼？請讀者自證）

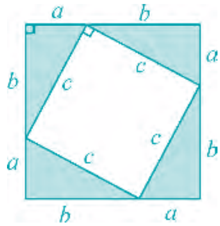


圖 1-1

設直角三角形兩直角邊分別為 a、b，斜邊為 c。圖中大正方形面積

$$S_{大} = (a+b)^2,$$

小正方形面積

$$S_{小} = c^2,$$

直角三角形面積 $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}ab$。顯然有

$$S_{大} = S_{小} + 4S_{\Delta},$$

也就是

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab,$$

把等式的左邊展開，兩邊消去 $2ab$，便得勾股定理

$$a^2 + b^2 = c^2。$$

到目前，勾股定理常見的證明方法，已有數十種了，但其中最簡單的證法，仍然是利用面積關係。

勾股定理證法之二：

作直角 ΔABC 斜邊 AB 上的高 CD，得到三個相似三角形，即

$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD。$$

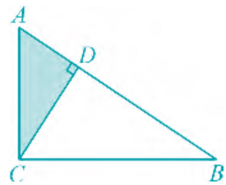


圖 1-2

（為甚麼？請讀者自證）

根據相似三角形的面積與對應邊的平方成正比的定理，可得

$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ACD} : S_{\Delta CBD} = AB^2 : AC^2 : BC^2。$$

也就是

$$S_{\Delta ABC} = kAB^2,\ S_{\Delta ACD} = kAC^2,\ S_{\Delta CBD} = kBC^2;$$

這裏 k 為正數。但是

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta BCD},$$

因而

$$kAB^2 = kAC^2 + kBC^2,$$

也就是

$$AB^2 = AC^2 + BC^2。$$

用面積關係說明一些基本的恆等式或不等式，也是早就被許多教科書所採用的方法。例如，從圖 1-3 一眼便可看出恆等式[①]

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy,$$

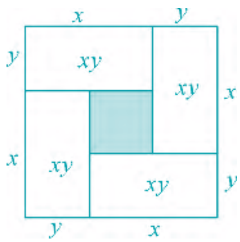


圖 1-3

由於 $(x-y)^2 \geq 0$，從而得到不等式

$$(x+y)^2 \geq 4xy,$$

或者化簡一下，得

$$x^2 + y^2 \geq 2xy。$$

當且僅當 $x = y$ 時等號才成立。

① 請注意：陰影部分的面積是 $(x-y)^2$。

生理學家和醫學家們的研究發現：我們大腦的兩個半球，左半球主要管抽象的東西——語言、邏輯、數位等，右半球主要管具體的東西——形象、圖畫、音樂等。把抽象的代數關係用具體的圖形表示出來，便動員了兩個半球同時工作，印象深、理解快、記得牢。用圖形表示代數關係的重要方法之一，便是用面積關係來聯繫的。

這本小冊子的目的，是試圖較為系統闡述用面積關係證明幾何命題的基本技巧和方法。

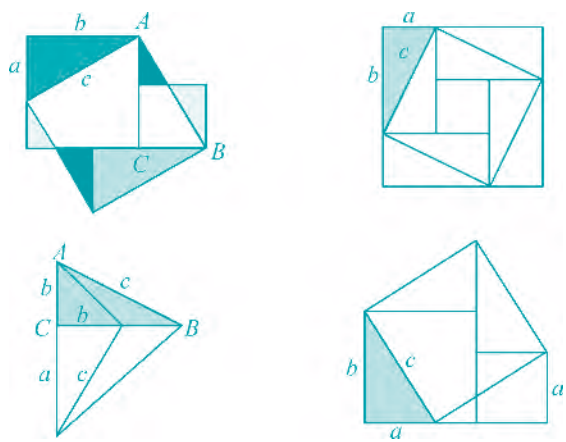
練習題一

1. 用面積關係表示下列恆等式：

(1) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$；

(2) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$。

2. 利用下列圖形，給出勾股定理的幾種證法。



3. 用面積關係表示阿貝爾恆等式：

$$\begin{aligned}&a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\\ =\ &a_1(b_1-b_2) + (a_1+a_2)(b_2-b_3) + \cdots\\ &+ (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(b_{n-1}-b_n)\\ &+ (a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n\text{。}\end{aligned}$$

第二章

同一個面積的多種表示

前面介紹的勾股定理的古老證法一雖然簡單，但它已體現了用面積關係證題的基本思想：用不同的方法計算同一塊面積，從而得到一個等式——這樣的等式我們把它叫做「面積方程」；再對這個「面積方程」進行整理或變換，以獲得我們所要的結果。

為了能夠列出各種各樣的面積方程，就要熟悉面積的計算方法。平面幾何中許多圖形，都可以分割成若干個三角形。於是，我們應當熟悉三角形面積的各種表示法。

按習慣，用 a、b、c 分別表示 ΔABC 的三個角 A、B、C 所對的邊，h_a、h_b、h_c 順次表示為 a、b、c 三條邊上的高，我們最熟悉的三角形面積公式是

$$三角形面積 = \frac{1}{2} \cdot 底 \cdot 高，$$

以後，為方便起見，我們用記號「ΔABC」表示三角形 ABC 本身，用 $S_{\Delta ABC}$ 表示它的面積。這樣做，上述公式便可清楚地記作

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c。 \tag{1}$$

對公式 (1) 略加改變，利用關係式

$$h_a = b\sin C$$

等代入，便得到了與角、邊都有聯繫的公式

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C。 \tag{2}$$

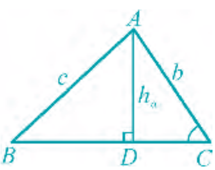


圖 2-1

這個公式，往往不被人們重視，其實，它的用處很大。因為它把平面幾何中三種最重要的度量——長度、角度、面積——緊密地聯繫在一起了。下面，我們很快可以看到公式 (2) 的重要性。

還有一個大家所熟知的海倫公式，即已知三角形三邊求面積的公式

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{。} \tag{3}$$

[$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 表示 ΔABC 的周長的一半] 我們利用勾股定理可從公式 (1) 導出這個公式。事實上，在圖 2-1 中令 $BD=x$，那麼 $DC=a-x$。由勾股定理列出方程式

$$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2\text{，}$$

展開後解得

$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\text{。}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad h_a^2 &= c^2-x^2=\frac{1}{4a^2}[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]\\
&=\frac{1}{4a^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)\\
&=\frac{1}{4a^2}[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]\\
&=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)\\
&=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)\text{。}
\end{aligned}$$

由此即得公式 (3) 。

三角形的面積公式遠遠不止以上三個，還可以導出已知三條高、或三條中線、或三條角平分線、或兩角一邊、或一邊及另兩邊上的高、或一角一對邊及這邊上的中線等等求面積的公式。這樣的公式至少也有幾十種。但是，在應用面積關係解題時，有了這三個，也就足夠用了。

其他多種多樣的三角形面積公式，都可以直接或間接地由這三個基本公式導出。請看以下的兩個例子。

〔例 1〕 已知 ΔABC 兩邊 b、c 上的高為 h_b、h_c，及另一邊 a，求它的面積。

解　利用面積公式 (1)，得到

$$b = \frac{2S_\Delta}{h_b}, c = \frac{2S_\Delta}{h_c},$$

這裏簡記 $S_{\Delta ABC}$ 為 Δ，代入海倫公式，得

$$\Delta = \frac{1}{4}\left[a + \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)2\Delta\right]^{\frac{1}{2}}\left[-a + \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)2\Delta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[a + \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)2\Delta\right]^{\frac{1}{2}}\left[a - \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)2\Delta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \qquad 16\Delta^2 = \left[\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)^2 4\Delta^2 - a^2\right]\left[a^2 - \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)^2 4\Delta^2\right]。$$

展開後得方程式

$$16\left(\frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2}\right)^2 \Delta^4 - 8\left[a^2\left(\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right) - 2\right]\Delta^2 + a^4 = 0。$$

解這個方程式，它的唯一的正實數根即為 ΔABC 的面積。以下從略。

〔例 2〕 已知 ΔABC 的三條中線為 m_a、m_b、m_c，求它的面積。

解　如圖 2-2 所示，設三條中線 AD、BE、CF 交於 P 點，由於

$$AP = \frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore \qquad \Delta APF = \frac{1}{2}S_{\Delta ABP} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}。$$

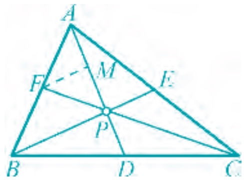


圖 2-2

取 AP 的中點 M，那麼

$$MP = \frac{1}{3}m_a，PF = \frac{1}{3}m_c，FM = \frac{1}{3}m_b。$$

而

$$S_{\Delta MPF} = \frac{1}{2}S_{\Delta APF} = \frac{1}{12}S_{\Delta ABC}。$$

於是由海倫公式可得

$$\frac{1}{12}S_{\Delta ABC} = S_{\Delta MPF}$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

$$\left(m = \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c)\right)。$$

$$\therefore \qquad S_{\Delta ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}。$$

在上述的解法中，用到了中線的性質。這些性質也可以獨立地由面積關係導出。請讀者參看第九章的例 1。

練習題二

1. 已知 ΔABC 的三條高為 h_a、h_b、h_c，求它的面積和三邊。

2. 已知 ΔABC 的周長和內切圓的半徑，求它的面積。

3. 已知 ΔABC 的 a 邊及 B、C 兩角，求它的面積。